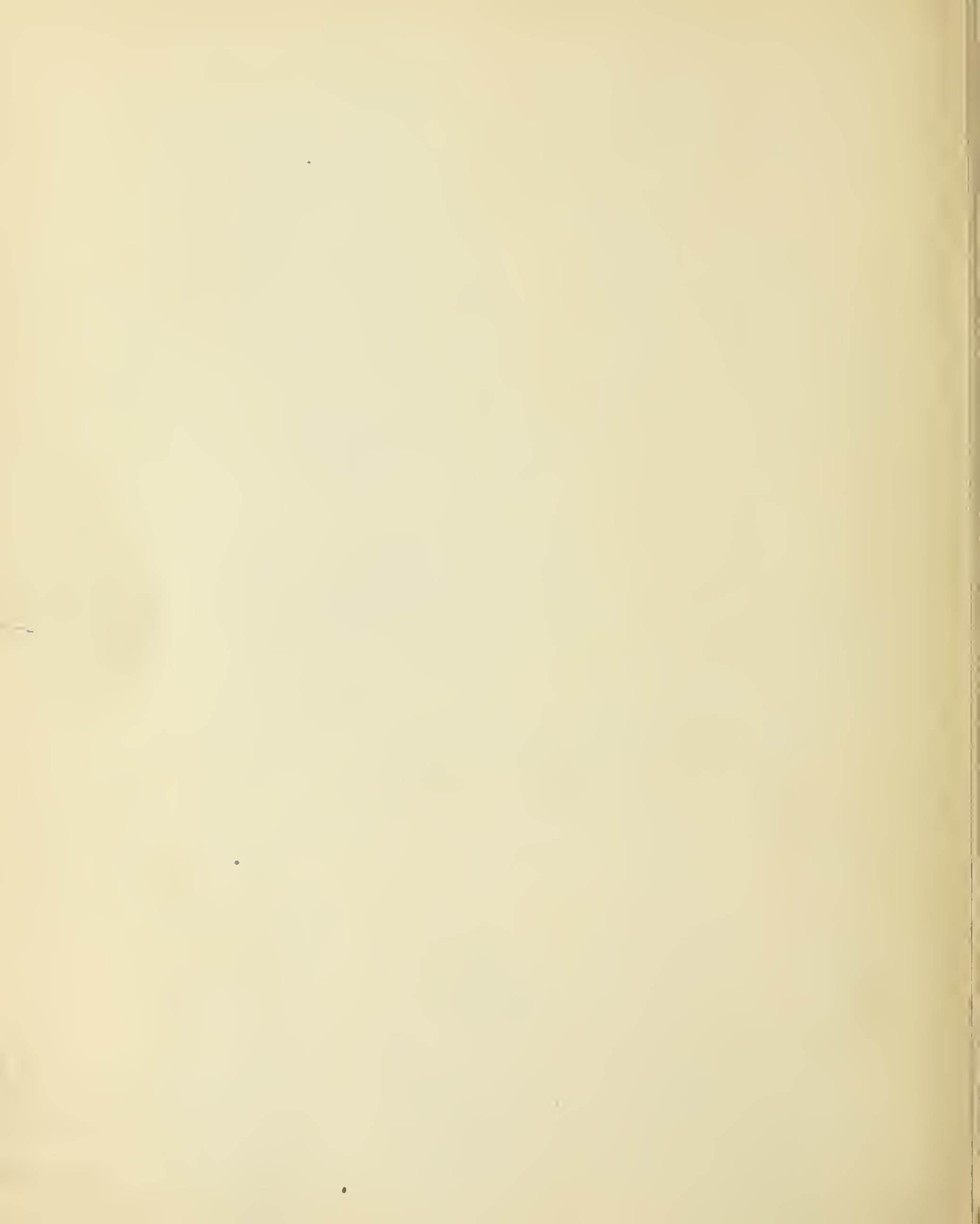






Ueber eine Verallgemeinerung der Schroeter'schen Multiplicationsformeln für Thetareihen.

Von

Victor Mertens.

Die erste Schroeter'sche Veröffentlichung über Modulargleichungen[1]) hatte einen eigentümlichen Zugang zur algebraischen Behandlung der Thetareihen längst erschlossen; aber erst in jüngerer Zeit fand das höchst fruchtbare Verfahren die verdiente Beachtung, ohne indess die Geltung einer wissenschaftlichen Methode zu erlangen. Der naheliegende Versuch, dasselbe von seinem heuristischen Character zu befreien, ist im folgenden soweit durchgeführt, dass in der Anwendung nur Aufgaben bleiben, wie sie etwa in der Theorie der allgemeinen symmetrischen Functionen auftreten. Im Einzelnen sind dabei die Anwendungen bevorzugt worden, welche einen unmittelbaren Bezug auf einfache Wurzelfunctionen der Multiplicatorgleichung gestatten.

Unter diesem Gesichtspunkt erschien die umständliche und wenig übersichtliche Auszeichnung besonderer Thetafunctionen durch äussere Indices um so weniger erforderlich, als die Verschiedenheit der vier für elliptische Transcendenten grundlegenden Functionen im Argumente einen genügenden Ausdruck findet. Es soll daher nur die Jacobi'sche Reihe $\vartheta_3(x,q)$, in welcher $\frac{2x}{\pi}=s$ und $\log q=\omega\pi i$ gesetzt ist, als das einzige Theta beibehalten werden und zwar mit der Bezeichnung:

$$(1) \qquad \vartheta(\omega,s)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i(\omega n^2+sn)}.$$

Die Anführung des imaginären Moduls ω bleibt erlassen, wenn derselbe für eine Entwicklung belanglos wird; es sind also die ausgezeichneten Thetafunctionen nach Jacobi in folgender Weise völlig verständlich definiert:

$$\vartheta(x,q)=\vartheta(s+1),\ \vartheta_1(x,q)=e^{\frac{\pi i}{4}(\omega+2s+2)}\vartheta(s+1+\omega),\ \vartheta_2(x,q)=e^{\frac{\pi i}{4}(\omega+2s)}\vartheta(s+\omega),\ \vartheta_3(x,q)=\vartheta(s).$$

Ein häufiger und meist stillschweigender Gebrauch wird von der für ganzzahliges g und h giltigen Functionalgleichung:

$$(2) \qquad \vartheta(s)=\vartheta(-s)=e^{\pi i(h^2\omega+hs)}\vartheta(s+2g+2h\omega)$$

gemacht werden, aus welcher beiläufig der Wert der Constanten $\vartheta(1+\omega)=0$ folgt.

---

1) Schroeter: De aequationibus modularibus. Königsb. 1854.

Der Ausgangspunkt für die Entwicklung des Productes zweier Theta in Productreihen ist bei Schroeter a. a. O. die Analogie der linearen Zerlegung:

$$(3)\qquad \vartheta(\omega,s) = \sum_{b \bmod q} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\pi i[\omega(qm+b)^2+s(qm+b)]} = \sum_{b \bmod q} e^{\pi i(\omega b^2+sb)}\, \vartheta(q^2\omega, qs+2\omega qb).$$

Gleich an dieser Stelle lässt sich ein bekanntes typisches Verfahren anwenden, welches auf eine entsprechende Formel für die Teilwerte der reellen Periode führt und daher auch im weiteren bei Formeln von einiger Bedeutung anzurufen ist. Es besteht darin, dass man s um $\frac{2d}{q}$ zunehmen lässt und nunmehr über d nach dem ganzzahligen Modul q summiert; danach verschwinden auf der einen Seite alle Glieder bis auf das eine, in welchem b den Wert Null hat; dieses eine aber tritt $q$mal auf:

$$(4)\qquad \sum_{b \bmod q} \vartheta\left(\omega, s+\frac{2b}{q}\right) = q\vartheta(q^2\omega, qs)$$

und mit einer leichtverständlichen Erweiterung:

$$(5)\qquad \sum_{d \bmod q} e^{\frac{-2\pi ikd}{q}}\, \vartheta\left(\omega, s+\frac{2d}{q}\right) = q e^{\pi i(\omega k^2+sk)}\, \vartheta(q^2\omega, qs+2\omega qk).$$

Berücksichtigt man, dass für einen gradzahligen Zuwachs des imaginären Periodicitätsmoduls der Wert der Reihe unverändert bleibt:

$$\vartheta(\omega+2k, s) = \vartheta(\omega, s)$$

so lässt sich die Formel (3) allgemeiner aussprechen:

$$(6)\qquad \vartheta\left(\frac{\omega+2k}{q}, s\right) = \sum_{b \bmod q} e^{\pi i\frac{2kb^2}{q}} \left| e^{\pi i\left(\frac{\omega b^2}{q}+sb\right)}\, \vartheta(q\omega, qs+2\omega b)\right|$$

wobei man bemerke, dass für $s=0$ die verschiedenen Werte k hier die Wurzeln der Multiplicatorgleichung vom $q+1$ten Grade bis auf eine characterisieren.

Mehrfache Umbildungen solcher Art, welche Schroeter mit den beiden Summations-Indices im Producte zweier Theta vornimmt, laufen zuletzt darauf hinaus, statt jener Indices neue einzuführen, deren Abhängigkeit von den ursprünglichen sich ohne Umwege durch eine Substitutionsdeterminante ausdrücken lässt. Darin liegt die Möglichkeit, die bezüglichen Formeln unmittelbar und in völliger Allgemeinheit für jede beliebige Anzahl von Thetafactoren aufzustellen. Das Problem lautet also: „die Summations-Indices eines Productes von Thetareihen einer linearen Transformation zu unterwerfen, aus welcher wieder eine Summe von Thetaproducten hervorgeht“.

Das Verhältnis dieser Transformation, durch welche den imaginären Periodicitätsmoduln nur ganzzahlige Factoren zugeführt werden, zu der allgemeinen Transformation wäre im Anschluss an bekannte Betrachtungen Eisensteins[1]) dahin auszusprechen: die letztere stellt eine andere Summationsordnung her zwischen dem in der Transscendenten e implicite und dem in ihrem Exponenten explicite enthaltenen Index, und da diese Ordnung für die Reihe constituierend ist, so hat die allgemeine Transformation eine Erörterung des veränderten Wertes und Geltungsbereiches der Reihe zur Voraussetzung; die beabsichtigte, nur auf die expliciten Indices sich erstreckende Transformation ist einer solchen Erörterung überhoben, weil sie keinerlei Bevorzugung in der Ordnung der Indices zu berücksichtigen hat, die letzteren vielmehr, wie die Factoren des endlichen Thetaproductes selbst, unbedingt vertauschbar sind.

1) Eisenstein: Untersuchung der unendlichen Doppelproducte. Crelle-Kronecker 35. Man sehe auch die bezüglichen Ausführungen in der Schlussnote.

Die auf sämmtliche Indices n_ι in dem Producte von q Factoren:

$$(7)\qquad \Pi_{\iota \bmod q} \vartheta(p_\iota \omega, s_\iota) = \sum_{n_\iota=-\infty}^{n_\iota=+\infty} e^{\pi i(\omega \sum_{\nu=1}^{\nu=q} p_\nu n_\nu^2 + \sum_{\iota=1}^{\iota=q} s_\iota n_\iota)} \quad (p_\iota \text{ ganzzahlig})$$

anzuwendende Substitution sei:

$$(8)\qquad n_\nu = \sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho} m_\varrho + q_\nu$$

worin man unter q_ι ganzzahlige „Transformationsreste"[1]) versteht, welche nach einem näher zu bestimmenden Modul so abzuändern sind, dass der Gesammtbestand der Zahlen n_ν mit ihrer Hilfe durch die m_ν wiedererzeugt wird.

Die Bedingung, dass die vielfache Summe selbst in Thetaproducte zerfällt. führt auf eine Substitution, welche die orthogonale als besonderen Fall enthält; es handelt sich nämlich um die Transformation der quadratischen Form:

$$(9)\qquad \sum_{\iota \bmod q} p_\iota n_\iota^2 \sim \sum_{\iota \bmod q} \{P_\iota m_\iota^2 + 2 Q_\iota m_\nu + R_\nu\}$$

mittels der Determinante $A = |a_{i,\varkappa}|$, deren Elemente danach den $q\frac{(q+1)}{2}$ Bedingungsgleichungen:

$$(10)\qquad \sum_{\nu \bmod q} p_\nu a_{\nu,\varrho} a_{\nu,\sigma} = \delta_\sigma^\varrho P_\varrho$$

zu unterwerfen sind; (darin bedeutet δ_σ^ϱ das Kronecker'sche Zeichen, welches gleich 1 oder 0 anzunehmen ist, jenachdem $\varrho = \sigma$ oder $\varrho \gtrless \sigma$). Aus diesen Gleichungen leitet man eine einfache Beziehung zwischen den $a_{i,\varkappa}$ und ihren Unterdeterminanten $\frac{\partial A}{\partial a_{i,\varkappa}}$ ab:

$$(11)\qquad A\, a_{i,\varkappa} p_i = \frac{\partial A}{\partial a_{i,\varkappa}} P_\varkappa$$

eine Beziehung, die ihrerseits zu einer Umkehrung der vorhergehenden Bedingungsgleichungen führt:

$$(12)\qquad \sum_{\iota \bmod q} \frac{a_{\varrho,\iota} a_{\sigma,\nu}}{P_\nu} = \frac{\delta_\sigma^\varrho}{p_\varrho}$$

und die auf complementäre Unterdeterminanten $a_{\lambda\mu\nu\ldots lmn\ldots}$ von beliebiger Ordnung ausgedehnt:

$$A a_{\lambda\mu\nu\ldots lmn\ldots} p_\lambda p_\mu p_\nu \cdots = \frac{\partial A}{\partial a_{\lambda\mu\nu\ldots lmn\ldots}} P_l P_m P_n \cdots$$

zuletzt für die vollständige Determinante den Wert liefert:

$$(13)\qquad A^2 = \Pi_{\iota \bmod q} \frac{P_\nu}{p_\nu}.$$

Diese Bestimmung gibt einen wesentlichen Anhaltspunkt für die Ermittlung der Aequivalenzmoduln, von welchen das System der Parameter q_ν abhängt, insofern diese zusammengenommen den Gesammtbestand der Reste nach dem Modul A erschöpfen müssen. Weiteren Aufschluss gewährt die Betrachtung des mit P_ϱ bezeichneten Coefficienten von m_ϱ in der transformierten Form:

$$(14)\qquad Q_\varrho = \sum_{\nu \bmod q} a_{\nu,\varrho} p_\nu q_\nu$$

Führt man denselben in Gleichung (12) ein:

$$(15)\qquad \sum_{\varrho \bmod q} \frac{a_{\varkappa,\varrho} Q_\varrho}{P_\varrho} = q_\varkappa$$

1) Man vergleiche die Schlussnote.

so erhellt, dass die allgemeinen Indices $n_\varkappa = n'_\varkappa + q_\varkappa$ aus den besonderen $n'_\varkappa = \sum_{\varrho \bmod q} a_{\varkappa,\varrho} m_\varrho$ hervorgehen, indem man den ganzen Zahlen m_ϱ einen Bruch $\frac{Q_\varrho}{P_\varrho}$ hinzufügt; es stehen also bei den Q_ϱ nur Reste nach dem Modul P_ϱ in Frage, und die Anzahl dieser Reste erfährt eine fernere Beschränkung durch den Wert der Determinante A. Eine bestimmtere theoretische Umgrenzung der Transformationsparameter q_ν oder der von ihnen abhängigen Q_ν möchte vorläufig nicht angängig sein; sie bleibt daher der Erörterung der besonderen Fälle vorbehalten; nur bemerke man noch die aus der Summation über ϱ in:

$$\frac{Q_\varrho Q'_\varrho}{A_\varrho} = \sum_{\varkappa,\lambda \bmod q} \frac{a_{\varkappa,\varrho} a_{\lambda,\varrho}}{A_\varrho} p_\varkappa p_\lambda q_\varkappa q'_\lambda$$

sich ergebende Beziehung für die Restensysteme q und q':

$$\sum_{\varrho \bmod q} \frac{Q_\varrho Q'_\varrho}{P_\varrho} = \sum_{\varrho \bmod q} p_\varrho q_\varrho q'_\varrho \tag{16}$$

durch welche die Summe $\sum_\varrho R_\varrho = \sum_\varrho p_\varrho q_\varrho^2$ in $\sum_\varrho R_\varrho = \sum_\varrho \frac{Q_\varrho^2}{P_\varrho}$ übergeführt wird.

Demnach besteht die Gleichheit:

$$\sum_{\nu \bmod q} p_\nu n_\nu^2 = \sum_{\nu \bmod q} \left(P_\nu m_\nu^2 + 2 Q_\nu m_\nu + \frac{Q_\nu^2}{P_\nu} \right) = \sum_{\nu \bmod q} \frac{(P_\nu m_\nu + Q_\nu)^2}{P_\nu} \tag{17}$$

und soweit die Argumente s_ν von der Transformation in Mitleidenschaft gezogen sind:

$$\sum_{\nu \bmod q} s_\nu n_\nu = \sum_{\varrho \bmod q} \Big(\sum_{\nu \bmod q} s_\nu a_{\nu,\varrho} \Big) m_\varrho + \sum_{\nu \bmod q} s_\nu q_\nu = \sum_\varrho \Big(\sum_\nu s_\nu a_{\nu,\varrho} \Big) m_\varrho + \sum_\varrho \Big(\sum_\nu s_\nu a_{\nu,\varrho} \Big) \frac{Q_\varrho}{P_\varrho}. \tag{18}$$

Die Schroeter'sche Transformation des Thetaproductes ist danach durch zwei Hauptformeln ausgesprochen:

$$\text{(I)[1]} \qquad \prod_{\nu \bmod q} \vartheta(p_\nu \omega, s_\nu) = \sum_{Q_\varrho} \prod_{\varrho \bmod q} \left| e^{\pi i \left[\omega \frac{Q_\varrho^2}{P_\varrho} + \left(\sum_\nu a_{\nu,\varrho} s_\nu \right) \frac{Q_\varrho}{P_\varrho} \right]} \vartheta\Big(P_\varrho \omega, \sum_{\nu \bmod q} a_{\nu,\varrho} s_\nu + 2 \omega Q_\varrho \Big) \right|$$

$$\text{(II)[1]} \qquad \prod_{\nu \bmod q} \vartheta\Big(p_\nu \omega, p_\nu \sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho} \sigma_\varrho \Big) = \sum_{Q_\varrho} \prod_{\varrho \bmod q} \left| e^{\pi i \left(\omega \frac{Q_\varrho^2}{P_\varrho} + \sigma_\varrho Q_\varrho \right)} \vartheta(P_\varrho \omega, P_\varrho \sigma_\varrho + 2 \omega Q_\varrho) \right|$$

von welchen die zweite, vielfach zweckdienlichere mittels $s_\varkappa = p_\varkappa \sum a_{\varkappa,\varrho} \sigma_\varrho$ aus der ersten hervorgeht.

Die Reste Q_ϱ in der Hauptformel sind durch die Aequivalenz:

$$Q_\varrho \equiv \sum_{\nu \bmod q} a_{\nu,\varrho} p_\nu q_\nu \pmod{P_\varrho} \tag{19}$$

statt durch Gleichheit (14) zu definieren; auch die Anwendung der Functionalgleichung (2) zeigt nämlich, dass man dieselben nach dem Modul P_ϱ beliebig erweitern oder einschränken darf; die Argumente der rechtsseitigen Theta unterscheiden sich also nur um kleinste Reste mod $2 P_\varrho \omega$.

Für die praktische Ermittlung der Reste Q_ϱ stehen mehrere Wege offen; streng theoretisch kann im bestimmten Falle eine beschränkte Anzahl von indepedenten Parametern $q_\varkappa$ nach einer ebenso beschränkten Zahl von Moduln ausgesondert werden; die übrigen sind gleich Null zu setzen und danach durch Elimination die Reste Q_ϱ in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit darzustellen. Als ein Beispiel nehme man den Fall, der später durchzuführen ist: $\frac{P_\varrho}{p_\varrho} = \frac{P_{\varrho+q'_2}}{p_{\varrho+q'_2}} = S_\varrho$;

1) Mitteilung des Verf. an Prof. Schroeter 1883.

dieser gestattet die Hälfte der Parameter $q_\varkappa$ zum Verschwinden zu bringen und nach Elimination der übrigen die Abhängigkeit zu formulieren:

$$Q_{\varrho+q_2} = \sum_{\nu=1}^{\nu=q/2} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q/2} a_{\nu,\varrho+q_2} \frac{\partial B}{B \partial a_{\nu,\sigma}} Q_\sigma \tag{20}$$

$$B = \left| a_{i,\varkappa} \right|_{\substack{i=1\ldots q/2 \\ \varkappa=1\ldots q/2}}$$

Ein andrer gangbarer Weg ist die Bildung der Reste Q_ϱ aus den Elementen der Substitutionsdeterminante selbst. Die Definitions-Aequivalenz (19) ergibt nämlich für $q_\nu = \delta^\nu_\varkappa$, — einer Combination, welche immer auftreten muss, — eine Coefficientenreihe

$$Q_\varrho = a_{\varkappa,\varrho} p_\varkappa \qquad \varrho = 1 \text{ bis } \varrho = q$$

welche für die verschiedenen Werte $\varkappa$ ohne weiteres q brauchbare Restengruppen enthält, aus denen sich durch Multiplication mit geeigneten Factoren $q_\varkappa$ wieder andere herleiten lassen; im einzelnen Falle bietet sich zur Vervollständigung des Restensystems leicht ein Schema von einfachen rationalen Operationen dar, bezüglich dessen auf die besonderen Anwendungen verwiesen sei.

Die Ermittelung der Elemente $a_{i,\varkappa}$ selbst hat die in (10) definierte quadratische Form $P = \sum_{\nu=1}^{\nu=q} p_\nu x_\nu^2$ zum Ausgangspunkt zu nehmen und sich der für die orthogonale Substitution gegebenen theoretischen Hilfsmittel zu bedienen.

Es soll endlich schon hier angedeutet werden, dass der Uebergang zu den Teilwerten des reellen Periodicitätsmoduls, entsprechend dem von Formel (3) zu Formel (4), sich auch für die verallgemeinerte Schroeter'sche Multiplication in vollständiger Bestimmtheit vollzieht, sobald die Transformationsreste festgestellt sind; das Ergebniss einer Substitution $s_\varrho + \frac{2r_\varrho}{P_\varrho}$ mit nachfolgender Summation über r_ϱ hat nämlich die Form:

$$A \prod_{\varrho \bmod q} \vartheta(P_\varrho \omega, P_\varrho s_\varrho) = \sum_r \prod_{\varkappa \bmod q} \left\{ \vartheta\left(p_\varkappa \omega, p_\varkappa \sum_{\varrho \bmod q} a_{\varkappa,\varrho} s_\varrho + 2 p_\varkappa \sum_{\varrho \bmod q} \frac{a_{\varkappa,\varrho} r_\varrho}{P_\varrho} \right) \right\} \tag{21}$$

wenn man unter r_ϱ ein den q_ϱ analoges Restensystem versteht. Ein andrer Weg, die Hauptformel ganz oder teilweise in eine Divisionsformel umzusetzen, ist durch Einführung der Zerlegung (4) gegeben.

Durch die irrationale Form der Substitutionsdeterminante $A = \sqrt{\prod_{\varrho \bmod q} \frac{P_\varrho}{p_\varrho}}$ wird die besondere Unterstellung nahegelegt, dass jede der Grössen $\frac{P_\varrho}{p_\varrho}$ ein vollständiges Quadrat R_ϱ^2 bildet; man hat also den Formeln (10)—(13) entsprechend:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=q} p_\nu a_{\nu,\varrho} a_{\nu,\sigma} = \delta^\sigma_\varrho p_\varrho R_\varrho^2$$

$$R_\varkappa^2 = \frac{A p_i}{p_\varkappa} \left(a_{i,\varkappa} : \frac{\partial A}{\partial a_{i,\varkappa}} \right), \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \frac{a_{\varrho,\nu} a_{\sigma,\nu}}{p_\nu R_\nu^2} = \frac{\delta^\sigma_\varrho}{p_\varrho}, A = \prod_{\nu=1}^{\nu=q} R_\nu .$$

Die Hauptformeln werden in diesem Falle unter Zurückführung auf die ursprünglichen Parameter q_ν statt der Q_ν:

$$\prod_{\varrho \bmod q} \vartheta(p_\varrho \omega, s_\varrho) = \sum_{q_\varrho \bmod R_\varrho} \left\{ \prod_{\varrho \bmod q} e^{\pi i (\omega p_\varrho q_\varrho^2 + q_\varrho s_\varrho)} \vartheta\left(p_\varrho R_\varrho^2 \omega, \sum_{\nu=1}^{\nu=q} a_{\nu,\varrho} s_\nu + 2\omega \sum_{\nu=1}^{\nu=q} a_{\nu,\varrho} p_\nu q_\nu \right) \right\} \tag{Ia}$$

$$\text{(IIa)}\quad \prod_{\varrho \bmod q} \vartheta\Big(p_\varrho\omega, p_\varrho \sum_{\iota=1}^{\iota=q} a_{\varrho,\iota}\sigma_\iota\Big) = \sum_{q_\varrho \bmod R_\varrho} \Big| \prod_{\varrho \bmod q} e^{\pi i (\omega p_\varrho q_\varrho^2 + \sigma_\varrho \sum_\nu a_{\nu,\varrho} p_\nu q_\nu)} \vartheta\Big(p_\varrho R_\varrho^2 \omega, p_\varrho R_\varrho^2 \sigma_\varrho + 2\omega \sum_{\nu=1}^{\nu=q} a_{\nu,\varrho} p_\nu q_\nu\Big)\Big|$$

Eine einfache Anwendung dieser Formeln wird durch die identische Darstellung eines Quadrates $n^2=(n-2)^2+(n-1)2^2$ ermöglicht; diese Zerlegung führt auf eine Substitutionsdeterminante von n^n Elementen $a_{\iota,\varkappa}=2-\delta^\iota_\varkappa n$, sofern man sämmmtliche $p_\varkappa$ der Einheit gleichsetzt.

Die Hauptformeln dieses Falles:

$$\text{(Ib)}\qquad \prod_{\varrho=1}^{\varrho=\nu} \vartheta(\omega, s_\varrho) = \sum_{q_\varrho \bmod n} \Big| \prod_{\varrho \bmod n} e^{\pi i(\omega q_\varrho^2 + q_\varrho s_\varrho)} \vartheta\Big[n^2\omega, 2\sum_{\iota=1}^{\iota=n} s_\iota - n s_\varrho + 2\omega\Big(2\sum_1^n q_\nu - n q_\varrho\Big)\Big]\Big|$$

$$\text{(IIb)}\quad \prod_{\varrho=1}^{\varrho=n} \vartheta\Big(\omega, 2\sum_\iota s_\iota - n s_\varrho\Big) = \sum_{q_\varrho \bmod n} \Big| \prod_{\varrho \bmod n} e^{\pi i [\omega q_\varrho^2 + \sigma_\varrho(2\sum_1^n q_\iota - n q_\varrho)]} \vartheta\Big[n^2\omega, n^2\sigma_\varrho + 2\omega\Big(2\sum_1^n q_\nu - n q_\varrho\Big)\Big]\Big|$$

gestatten die früher angedeutete Umkehrung. Man lasse zu diesem Zwecke die σ_ϱ in (IIa) um $\frac{2d_\varrho}{n^2}$ zunehmen und summiere nunmehr über d_ϱ nach dem Modul n; die Argumente der rechtsstehenden Theta bleiben gemäss der Functionalgleichung (2) unverändert, und die Summation über den Zuwachs $e^{\frac{2\pi i d}{n^2}(2\sum_1^n q_\nu - n q_\varrho)}$ lässt nur das eine Glied n^nfach bestehen, in welchem sämmtliche q_ν verschwinden. Daher werden die Umkehrformeln mit Vertauschung der Seiten und Umsetzung von $n^2\omega$ in ω:

$$\text{(IIIb)}\qquad n^n \prod_{\varrho \bmod n} \vartheta(\omega, n^2\sigma_\varrho) = \sum_{d_\varrho \bmod n} \Big| \prod_{\varrho=1}^{\varrho=n} \vartheta\Big(\frac{\omega}{n^2}, 2\sum_1^n \sigma_\nu - n\sigma_\varrho + 2\,\frac{2\sum_1^n d_\nu - n d_\varrho}{n^2}\Big)\Big|$$

$$\text{(IVb)}\qquad n^n \prod_{\varrho \bmod n} \vartheta\Big(\omega, 2\sum_{\nu=1}^{\nu=n} s_\iota - n s_\varrho\Big) = \sum_{d_\varrho \bmod n} \Big| \prod_{\varrho=1}^{\varrho=n} \vartheta\Big(\frac{\omega}{n^2}, s_\varrho + 2\,\frac{2\sum d_\nu - n d_\varrho}{n^2}\Big)\Big|.$$

Diese Formeln lassen sich durch geeignete Behandlung in Beziehungen zwischen Thetafunctionen desselben Moduls ω überleiten. Zu diesem Behufe lasse man in (IIb) jedes s_ϱ um $\frac{4r\omega}{n^2}$ wachsen, wodurch die links stehenden Argumente den Zuwachs $2n\,\frac{4r\omega}{n^2} - n\,\frac{4r\omega}{n^2} = \frac{4r\omega}{n}$ erhalten; multipliciert man noch mit $e^{\left(\pi i \frac{4r^2}{n}\omega + 2r\sum_1^n s_\iota\right)}$, so wird das linksseitige Product von der Wahl der r nach dem Aequivalenzmodul n unabhängig:

$$\prod_{\varrho \bmod n} e^{\pi i\left(\omega\frac{4r^2}{n^2} + 2r s_\varrho\right)} \vartheta\Big(\omega, 2\sum_1^n s_\iota - n s_\varrho + \frac{4r\omega}{n}\Big) = \sum_{d_\varrho \bmod n} \Big| \prod e^{\pi i\left(\omega\frac{d_\varrho^2}{n^2} + s_\varrho d_\varrho\right)} \vartheta(n^2\omega, n^2 s_\varrho + 2\omega d_\varrho)\Big|$$

Darin ist $d_\varrho = 2\sum_{\iota=1}^{\iota=n} q_\nu + 2r - n q_\varrho$; eine Summierung nach r über alle Werte, welche $\sum_{\iota=1}^{\iota=q} q_\nu$ annehmen kann, hebt den Einfluss von $\sum_{\iota=n}^{\iota=1} q_\nu$ auf, so dass also $\sum_{\nu=n}^{\iota=1} q_\nu + r$ durch den einzigen Index r ersetzt werden darf:

$$\sum_{r \bmod n} \Big| \prod_{\varrho \bmod n} e^{\pi i\left(\omega\frac{4r^2}{n^2} + 2r s_\varrho\right)} \vartheta\Big(\omega, 2\sum_{\nu=1}^{\iota=n} s_\iota - n s_\varrho + \frac{4r\omega}{n}\Big)\Big| =$$

$$\sum_{r, d_\varrho \bmod n} \Big| \prod_{\varrho \bmod n} e^{\pi i\left[\omega\left(\frac{2r - n q_\varrho}{n}\right)^2 + s_\varrho(2r - n q_\varrho)\right]} \vartheta[n^2\omega, n^2 s_\varrho + 2\omega(2r - n q_\varrho)]\Big| =$$

$$\sum_{r, q_\varrho \bmod n} \left\{ \Pi\, e^{\pi i \left[\omega \frac{4r^2}{n^2} + 2 r s_\varrho\right]} e^{\pi i \left[\omega q_\varrho^2 - \left(n s_\varrho + \frac{4\omega r}{n}\right) q_\varrho\right]} \vartheta\left[n^2\omega, n\left(n s_\varrho + \frac{4\omega r}{n}\right) - 2\omega n q_\varrho\right]\right\} =$$

$$\sum_{r \bmod n} e^{\pi i \left(\omega \frac{4r^2}{n} + 2r \sum_1^n s_\iota\right)} \left\{ \prod_{\varrho=1}^{\varrho=\nu} \sum_{q \bmod n} e^{\pi i \left[\omega q^2 - \left(n s_\varrho + \frac{4\omega r}{n}\right) q\right]} \vartheta\left[n^2\omega, n\left(n s_\varrho + \frac{4\omega r}{n}\right) - 2\omega n q\right]\right\}.$$

Die unter dem Productzeichen der rechten Seite stehenden Summen erweisen sich nach (3) als die linearen Zerlegungen der Function $\vartheta\left(\omega, n s_\varrho + \frac{4\omega r}{n}\right)$, so dass wir mit Auslassung des beiderseits gleichlautenden Moduls ω zu der Beziehung gelangt sind:

$$(22)\quad \sum_{r \bmod n} \left\{ \prod_{\varrho \bmod n} e^{\pi i \left(\omega \frac{4r^2}{n^2} + 2 r s_\varrho\right)} \vartheta\left(2 \sum_1^n s_\iota - n s_\varrho + \frac{4 r\omega}{n}\right)\right\} = \sum_{r \bmod n} \left\{ \prod_{\varrho \bmod n} e^{\pi i \left(\omega \frac{4r^2}{n^2} + 2 r s_\varrho\right)} \vartheta\left(n s_\varrho + \frac{4\omega r}{n}\right)\right\}.$$

Dieselben Erwägungen ergeben in der Anwendung auf Formel (IVb):

$$(23)\quad \sum_{t \bmod n} \left\{ \prod_{\varrho \bmod n} \vartheta\left(2 \sum_{\iota=1}^{\iota=n} s_\iota - n s_\varrho + \frac{4t}{n}\right)\right\} = \sum_{t \bmod n} \left\{ \prod_{\varrho \bmod n} \vartheta\left(n s_\varrho + \frac{4t}{n}\right)\right\}.$$

Unter den symmetrischen Functionen, die für bestimmte Werte der Argumente aus diesen Relationen abzuleiten sind, befinden sich allgemein die $n$ten Potenzsummen der Teilwerte; setzt man nämlich die s_ϱ gleich $\frac{s}{n}$, nachdem man vorher einem von ihnen den Zuwachs $\frac{2t}{n}$, bezüglich $\frac{2r\omega}{n}$ gegeben hat, so entstehen die genannten Summen:

$$(24)\quad \sum_{r \bmod n} e^{\frac{4\pi i r t}{n}} \left\{ e^{\pi i \left(\omega \frac{4r^2}{n^2} + \frac{2rs}{n}\right)} \vartheta\left(s + 4\frac{t + r\omega}{n}\right)\right\}^n = \sum_{r \bmod n} e^{\frac{4\pi i r t}{n}} \left\{ e^{\pi i \left(\omega \frac{4r^2}{n^2} + \frac{2rs}{n}\right)} \vartheta\left(s + 4\frac{r\omega}{n}\right)\right\}^n$$

$$(25)\quad \sum_{t \bmod n} e^{\frac{4\pi i r t}{n}} \left\{ e^{\pi i \left(\omega \frac{4r^2}{n^2} + \frac{2rs}{n}\right)} \vartheta\left(s + 4\frac{t + r\omega}{n}\right)\right\}^n = \sum_{t \bmod n} e^{\frac{-4\pi i r t}{n}} \left\{ \vartheta\left(s + \frac{4t}{n}\right)\right\}^n.$$

Wir verfolgen diese Aussagen über den Zusammenhang der Thetateilwerte nicht, da ihre Physiognomie kaum eine überraschende ist und im weiteren eine andere Herleitung und Bestätigung finden wird.

Die zweite durch die Form der Substitutionsdeterminante bevorzugte Besonderung ist die, dass je zwei Moduln $\frac{P_\varrho}{p_\varrho} = \omega_\varrho$ einander gleich werden, ein Fall, für welchen die Abhängigkeit der Transformationsreste bereits durch Bedingung (20) festgelegt worden ist:

$$(26)\quad \begin{cases} Q_\varrho = \sum_{\iota=1}^{\iota=q/_2} a_{\iota,\varrho} p_\iota q_\iota,\ Q_{\varrho+q/_2} = \sum_{\iota=1}^{\iota=q/_2} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q/_2} a_{\iota,\varrho+q/_2} \frac{\partial B}{B \partial a_{\iota,\sigma}} Q_\sigma,\ B = \left| a_{i,\varkappa} \begin{matrix} i=1 \text{ bis } q/_2 \\ \varkappa=1 \ \text{„}\ q/_2 \end{matrix} \right| \\ \prod_{\iota \bmod q} \vartheta\left(p_\iota \omega, p_\iota \sum_{\varrho \bmod q} a_{\iota,\varrho}\sigma_\varrho\right) = \sum_{\substack{Q_1, Q_2 \ldots Q_{q/_2} \\ \bmod \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2 \ldots \overline{\omega}_{q/_2}}} \left\{ \prod_{\varrho \bmod q} e^{\pi i \left(\omega \frac{Q_\varrho^2}{p_\varrho \overline{\omega}_\varrho} + \sigma_\varrho Q_\varrho\right)} \vartheta\left(p_\varrho \overline{\omega}_\varrho \omega, \sigma_\varrho + 2\omega Q_\varrho\right)\right\} \end{cases}$$

Führt man in diese Formel $\sigma_\varrho + \frac{2r_\varrho}{\omega_\varrho}$ statt σ_ϱ von $\varrho=1$ bis $\varrho=q/_2$ ein, so bleiben die Argumente der rechten Seite unverändert; alle Theta dieser Seite bis auf das eine, in welchem die Q_ϱ gleich Null sind, kommen bei einer Summation über r_ϱ nach dem Modul $\overline{\omega}_\varrho$ wegen der Exponentialfactoren zum Verschwinden; wegen der Abhängigkeit der $Q_{\varrho+q/_2}$ von den Q_ϱ ver-

schwinden diese Restensysteme gleichzeitig; die linke Seite nimmt dagegen ein entsprechendes Restensystem R_ν auf, und die Formel wird nach Substitution von $\sum_{\nu \bmod q} a_{\nu,\varrho}\sigma_\nu$ statt $P_\varrho \sigma_\varrho$:

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&R_\varrho = p_\nu \sum_{\varrho=1}^{\varrho=q/2} a_{\nu,\varrho} \frac{r_\varrho}{\omega_\varrho},\ R_{\nu+q/2} = p_\nu \sum_{\varrho=1}^{\varrho=q/2} \sum_{\mu=1}^{\mu=q/2} a_{\nu+q/2,\varrho} \frac{\partial B}{B\,\partial a_{\mu,\varrho}} \cdot \frac{R_\mu}{p_\mu} \\
&A \prod_{\varrho \bmod q} \vartheta(p_\varrho \overline{\omega}_\varrho \omega, \sum_{\nu \bmod q} a_{\nu,\varrho}\sigma_\nu) = \sum_{R_\varrho} \left\{ \prod_{\varrho \bmod q} \vartheta(p_\varrho \omega, \sigma_\varrho + 2R_\varrho) \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nimmt man die $\overline{\omega}_\varrho$ sämmtlich gleich p an, so werden auch die p_ϱ identisch und gehen in den Modul ω ein; die Bedingungen (10) und (12) werden übereinstimmend:

$$
\sum_\nu a_{\nu,\varrho} a_{\nu,\sigma} = \sum a_{\varrho,\nu} a_{\sigma,\nu} = \delta_\sigma^\varrho\, p
$$

es steht also für diesen Fall nichts im Wege, auch das System der $a_{i,\varkappa}$ in (26) als übereinstimmend mit dem der $a_{\varkappa,i}$ in (27) aufzufassen; die Reste R_ϱ dürfen durch $\frac{Q_\varrho}{p}$ ersetzt werden. Da wir uns für die Folge ausschliesslich auf diesen Fall beschränken, so wiederholen wir die bezüglichen Formeln:

$$
(29)\qquad \prod_{\nu \bmod q} \vartheta(\omega, \sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho}\sigma_\varrho) = \sum_{\substack{Q_1, Q_2 \ldots Q_{q/2} \\ \bmod p}} \left\{ \prod_{\varrho \bmod q} e^{\pi i \left(\omega \frac{Q_\varrho^2}{p} + \sigma_\varrho Q_\varrho\right)} \vartheta(p\omega, p\sigma_\varrho + 2\omega Q_\varrho) \right\}
$$

$$
(30)\qquad p^{q/2} \prod_{\nu \bmod q} \vartheta(p\omega, \sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho}\sigma_\varrho) = \sum_{\substack{Q_1, Q_2 \ldots Q_{q/2} \\ \bmod p}} \left\{ \prod_{\varrho \bmod q} \vartheta\left(\omega, \sigma_\varrho + \frac{2Q_\varrho}{p}\right) \right\}
$$

und geben ihnen eine Erweiterung durch Teilwerte des Argumentes $\frac{2\varkappa_\varrho}{p}$ bezüglich $2\varkappa_\varrho \omega$, worin $\varkappa_\varrho$ ganzzahlig gedacht ist.

$$
\prod_{\nu \bmod q} \vartheta\left(\omega, \sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho}\sigma_\varrho + 2\sum_\varrho \frac{a_{\nu,\varrho}\sigma_\varrho \varkappa_\varrho}{p}\right) = \sum_{\substack{Q_1 Q_2 \ldots Q_{q/2} \\ \bmod p}} \left\{ \prod_{\varrho \bmod q} e^{\pi i \frac{\varkappa_\varrho Q_\varrho}{p}} \left[e^{\pi i \left(\omega \frac{Q_\varrho^2}{p} + \sigma_\varrho Q_\varrho\right)} \vartheta(p\omega, p\sigma_\varrho + 2\omega Q_\varrho) \right] \right\}
$$

$$
p^{q/2} \prod_{\nu \bmod q} \vartheta(p\omega, \sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho}\sigma_\varrho + 2[\sum_\varrho a_{\nu,\varrho}\varkappa_\varrho]\omega) = \sum_{\substack{Q_1 Q_2 \ldots Q_{q/2} \\ \bmod p}} \left\{ \prod_\varrho \vartheta\left(\omega, \sigma_\varrho + 2\varkappa_\varrho \omega + 2\frac{Q_\varrho}{p}\right) \right\}.
$$

Auf der rechten Seite der letzten Formel tritt nach der Functionalgleichung der Factor $e^{\pi i \left(\omega \sum_1^q \varkappa_\varrho^2 + \sum_\varrho \varkappa_\varrho \sigma_\varrho + \frac{\sum \varkappa_\varrho Q_\varrho}{p}\right)}$ heraus; nach den Bestimmungen über die Coefficienten $a_{\nu,\varrho}$ ist aber

$$
\sum_\varrho \varkappa_\varrho^2 = \frac{\sum_\nu (\sum_\varrho a_{\nu,\varrho}\varkappa_\varrho)^2}{p} \quad \text{und} \quad p\sum_\nu \sigma_\nu \varkappa_\nu = \sum_{\nu,\mu,\varrho} a_{\nu,\varrho} a_{\mu,\varrho} \sigma_\nu \varkappa_\mu = \sum_\varrho (\sum_\nu a_{\nu,\varrho}\sigma_\nu)(\sum_\mu a_{\mu,\varrho}\varkappa_\mu).
$$

Mit Uebertragung des Exponentialfactors nach der linken Seite werden also die Hauptformeln für diese Ergänzung des Arguments durch Teilwerte:

$$
(\text{Ic})\quad \prod_{\nu \bmod q} \vartheta\left(\omega, \sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho}\sigma_\varrho + 2\frac{\sum_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho}\varkappa_\varrho}{p}\right) = \sum_{Q_1 Q_2 . Q_{q/2} \bmod p} e^{\pi i \frac{\sum_\nu \varkappa_\nu Q_\nu}{p}} \left\{ \prod_{\varrho \bmod q} e^{\pi i \left(\omega \frac{Q_\varrho^2}{p} + \sigma_\varrho Q_\varrho\right)} \vartheta(p\omega, p\sigma_\varrho + 2\omega Q_\varrho) \right\}
$$

$$
(\text{IIc})\quad p^{q/2} \prod_{\nu \bmod q} e^{\pi i \left[\omega \left(\frac{\sum a_{\varrho,\nu}\varkappa_\varrho}{p}\right)^2 + (\sum a_{\varrho,\nu}\sigma_\varrho) \frac{\sum a_{\varrho,\nu}\varkappa_\varrho}{p}\right]} \vartheta(p\omega, \sum_{\varrho \bmod q} a_{\varrho,\nu}\sigma_\varrho + 2\omega \sum_\varrho a_{\varrho,\nu}\varkappa_\varrho) = \sum_{\substack{Q_1 Q_2 . Q_{q/2} \\ \bmod q}} e^{-\pi i \frac{\sum_\nu \varkappa_\nu Q_\nu}{p}} \left\{ \prod_\varrho \vartheta\left(\omega, \sigma_\varrho + 2\frac{Q_\varrho}{p}\right) \right\}.
$$

Daneben bestehen noch Formeln, in welchen beiderseits Teilwerte desselben Moduls auftreten: an sich weniger symmetrisch, lassen sie sich aus den vorstehenden mittels der Zerlegungen (3) und (4) ableiten.

Von besonderem Interesse sind die Relationen, welche durch Multiplication mit einem oder mehreren Factoren $e^{\pm \pi i \frac{\varkappa_\nu R_\nu}{p}}$ und nachheriger Summierung über $\varkappa_\nu$ entstehen; diese „Transformationsfunctionen", die auf der einen Seite nur Teilwerte des imaginären und auf der andern nur solche des reellen Moduls enthalten, sind nicht unbeschränkt in der Zahl und Zusammenstellung; man sieht nämlich, dass auf der linken Seite keine Combination von Werten $\sum\limits_{\varrho \bmod q} a_{\nu,\varrho}\varkappa_\varrho$ gewählt werden darf, die nicht auch als Resten-Combination $Q_\nu = \sum\limits_\varrho a_{\varrho,\nu} q_\varrho$ auf der rechten Seite vorkommen könnte.

Die identische Darstellung einer ungraden Zahl p durch die Quadrate ihrer Einheiten liefert eine den Bedingungen des letzten Falles entsprechende Substitutionsdeterminante von $(p+1)^2$ Elementen, in welchen durch geeignete Zeichenänderung ganzer Reihen stets die Elementenreihe $a_{o,i} = 1 - \delta_o^i$ herbeigeführt werden kann. Die allgemeine Bedingung (28) hat dann für sämmtliche Reihen die Folge $\sum\limits_\varkappa a_{i,\varkappa} = \sum\limits_\varkappa a_{\varkappa,i} = 1 + \delta_o^i (p-1)$; allgemein lässt sich noch durch geeignete Umordnung der Reihen $a_{i,i} = 0$ als Diagonalglied bestimmen. Setzt man daher in den Hauptformeln (c) für diesen Fall die σ_1 bis σ_p einander gleich und $\sigma_o = s$ und lässt die $\varkappa_\nu$ bis auf $\varkappa_o = \varkappa$ verschwinden, so gehen dieselben über in:

$$(31)\quad \vartheta(\omega, p\sigma) : \vartheta\left(\omega, s + \frac{2\varkappa}{p}\right)^p = \sum_Q e^{\frac{2\pi i \varkappa Q_o}{p}} \left\{ e^{\pi i \left(\omega \frac{Q_o^2}{p} + s Q_o\right)} \vartheta(p\omega, ps + 2\omega Q_o) \right\} \prod_{\varrho \bmod p} e^{\pi i \left(\omega \frac{Q_\varrho^2}{p} + \sigma Q_\varrho\right)} \vartheta(p\omega, p\sigma + 2\omega Q_\varrho)$$

$$(32)\quad p^{\frac{p+1}{2}} \vartheta(p\omega, p\sigma) \cdot \left[e^{\pi i \left(\frac{\varkappa^2 \omega}{p} + \frac{\varkappa s}{p}\right)} \vartheta(p\omega, s + 2\varkappa\omega) \right]^p = \sum_Q e^{\frac{-2\pi i \varkappa Q_o}{p}} \vartheta\left(\omega, s + \frac{2Q_o}{p}\right) \prod_{\varrho \bmod p} \vartheta\left(\omega, \sigma + \frac{2Q_\varrho}{p}\right).$$

Durch Einführung des Factors $e^{\frac{2\pi i \varkappa R}{p}}$ und Summenbildung nach $\varkappa$ gelingt es, die aus den Formeln (24) und (25) bekannten Potenzsummen auszuwerten; die Ausdrücke

$$\frac{\sum\limits_{\varkappa \bmod p} e^{\frac{-2\pi i \varkappa R}{p}} \vartheta\left(\omega, s + \frac{2\varkappa}{p}\right)^p}{e^{\pi i \left(\omega \frac{R^2}{p} + sR\right)} \vartheta(p\omega, ps + 2\omega R)} \quad \text{und} \quad \frac{\sum\limits_{\varkappa \bmod p} e^{\frac{2\pi i \varkappa R}{p}} \left[e^{\pi i \left(\frac{\varkappa^2}{p}\omega + \frac{\varkappa s}{p}\right)} \vartheta(p\omega, s + 2\varkappa\omega) \right]^p}{\vartheta\left(\omega, s + \frac{2R}{p}\right)}$$

erweisen sich dabei als constant in Bezug auf das Argument s; und in dieser Eigenschaft beruht die Berechtigung, sie als „Transformationsfunctionen" zu bezeichnen.

Wir stellen uns hier die Aufgabe, die eigentlichen „Transformationsfunctionen" für $p = 5$ aufzusuchen.

Eine einfache Ueberlegung führt auf die Substitution dieses Falles:

$$125 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

die Transformationsreste sind 1) die Reihen der Determinante selbst und deren Vielfache,

2) die daraus durch Addition der ersten Reihe zu den folgenden hervorgehenden Combinationen,
3) die Ergebnisse aus der Subtraction je zweier aufeinanderfolgenden Reihen.

Demnach sind sie sämmtlich in:

$$\begin{matrix} \tau, & \lambda+\tau, & \lambda-\tau, & \lambda, & \lambda-\tau, & \lambda+\tau \\ 0, & 2\lambda, & \lambda, & 0, & -\lambda, & -2\lambda \end{matrix}$$

für λ, τ, mod 5 und für eine cyclische Vertauschung der letzten 5 Elemente enthalten. Da nach einer früheren Bemerkung eben diese Werte auch auf der linken Seite der Hauptformeln (c) zu erwarten sind, so geben wir der Formel (Ic) folgende Gestalt:

$$\vartheta\left(\omega,\sum_1^5 s_i+\frac{2\tau}{5}\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{1,\varrho}s_\varrho+2\frac{\lambda+\tau}{5}\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{2,\varrho}s_\varrho+2\frac{\lambda-\tau}{5}\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{3,\varrho}s_\varrho+2\frac{\lambda}{2}\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{4,\varrho}s_\varrho+2\frac{\lambda-\tau}{5}\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{5,\varrho}s_\varrho+2\frac{\lambda+\tau}{5}\right)$$

$$\sum_Q e^{\frac{2\pi i}{5}(\lambda Q_0+\tau Q_3)}\prod_{\varrho=o}^{\varrho=5} e^{\pi i\left(\omega\frac{Q_\varrho^2}{5}+s_\varrho Q_\varrho\right)}\vartheta(5\omega,5s_\varrho+2\omega Q_\varrho).$$

$$(34)\quad \vartheta\left(\omega,\sum_1^5 s_i\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{1,\varrho}s_\varrho+\frac{4\tau}{5}\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{2,\varrho}s_\varrho+\frac{2\tau}{5}\right)\vartheta(\omega,\sum a_{3,\varrho}s_\varrho)\,\vartheta\left(\omega,\sum a_{4,\varrho}s_\varrho-\frac{2\tau}{5}\right)\vartheta\left(\omega,\sum a_{5,\varrho}+\frac{4\tau}{5}\right)=$$

$$\sum_Q e^{\frac{2\pi i\tau}{5}(Q_4-Q_2)}\prod_{\varrho=0}^{\varrho=5} e^{\pi i\left(\omega\frac{Q_\varrho^2}{5}+s_\varrho Q_\varrho\right)}\vartheta(5\omega,5s_\varrho+2\omega Q_\varrho).$$

Hauptformel (IIc) erfährt eine völlig analoge Umgestaltung.

Aus (33) gewinnt man für $\sum_{i=1}^{i=5} s_i=5s$ und $\sum_\varrho a_{i,\varrho}s_\varrho=\sigma$ die nachstehenden Transformationsfunctionen, jenachdem man über λ für $\tau=0$ oder $\tau\gtrless 0$ und mit oder ohne den Factor $e^{\frac{-2\pi i\lambda k}{5}}$ summiert:

$$(35)\ \vartheta(\omega,5s)\cdot\sum_{\lambda=1}^{\lambda=5}\vartheta\left(\omega,\sigma+\frac{2\lambda}{5}\right)^5=5\,\vartheta(5\omega,5\sigma)\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=5}\left[e^{\pi i\left(\omega\frac{\lambda^2}{5}+s\lambda\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\lambda\omega)\right]^5+20\prod_{\lambda \bmod 5} e^{\pi i\left(\omega\frac{\lambda^2}{5}+s\lambda\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\lambda\omega)\right\}$$

$$(36)\quad \vartheta(\omega,5s)\cdot\sum_{\lambda=1}^{\lambda=5} e^{\frac{-2\pi i\lambda k}{5}}\vartheta\left(\omega,\sigma+\frac{2\lambda}{5}\right)^5=$$

$$25e^{\pi i\left(\omega\frac{k^2}{5}+\sigma k\right)}\vartheta(5\omega,5s+2k\omega)\left\{\sum_\lambda\left(e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}(\lambda+k)^2+s(\lambda+k)\right)}\vartheta(5\omega,5s+2(\lambda+k)\omega)\right)^2\cdot\right.$$

$$\left.\left(e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}(\lambda-k)^2+s(\lambda-k)\right)}\vartheta(5\omega,5s+2(\lambda-k)\omega)\right)^2\cdot e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}\lambda^2+s\lambda\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\lambda\omega)\right\}.$$

$$(37)\quad \vartheta\left(\omega,5s+\frac{2\tau}{5}\right)\cdot\sum_{\lambda=1}^{\lambda=5}\vartheta\left(\omega,\sigma+2\frac{\lambda+\tau}{5}\right)^2\vartheta\left(\omega,\sigma+2\frac{\lambda-\tau}{5}\right)^2\vartheta\left(\omega,\sigma+\frac{2\lambda}{5}\right)=$$

$$5\vartheta(5\omega,5\sigma)\cdot\left\{\sum e^{\frac{2\pi i\lambda\tau}{5}}\left(e^{\pi i\left(\omega\frac{\lambda^2}{5}+s\lambda\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\lambda\omega)\right)^5\right.$$

$$(38)\quad \vartheta\left(\omega,5s+\frac{2\tau}{5}\right)\cdot\sum_{\lambda=5}^{\lambda=1} e^{\frac{-2\pi i\lambda k}{5}}\vartheta\left(\omega,\sigma+2\frac{\lambda+\tau}{5}\right)^2\vartheta\left(\omega,\sigma+2\frac{\lambda-\tau}{5}\right)^2\vartheta\left(\omega,\sigma+2\frac{\lambda}{5}\right)=$$

$$5\left(e^{\frac{2\pi i\tau k}{5}}+e^{\frac{-2\pi i\tau k}{5}}+e^{\frac{4\pi i\tau k}{5}}+e^{\frac{-4\pi i\tau k}{5}}\right)\cdot e^{\pi i\left(\omega\frac{k^2}{5}+\sigma k\right)}\vartheta(5\omega,5\sigma+2k\omega)\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=5} e^{\frac{2\pi i\lambda\tau}{5}}\left(e^{\pi i\left(\omega\frac{(\lambda+k)^2}{5}+(\lambda+k)s\right)}\vartheta(5\omega,5s+2(\lambda+k)\omega)\right)^2\cdot\right.$$

$$\left.\left(e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}(\lambda-k)^2+s(\lambda-k)\right)}\vartheta(5\omega,5s+2(\lambda-k)\omega)\right)^2 e^{\pi i\left(\omega\frac{\lambda^2}{5}+s\lambda\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\lambda\omega)\right\}.$$

Aus (34) folgen hier bei entsprechender Behandlung:

$$\vartheta(\omega,5s)\left[\vartheta(\omega,\sigma)^5+4\prod_{\lambda=0}^{\lambda=5}\vartheta\left(\omega,\sigma+\frac{2\lambda}{5}\right)\right]=5\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=4}e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}\varkappa^2+\varkappa\sigma\right)}\vartheta(5\omega,5\sigma+2\varkappa\omega)\left\{\sum_\mu\left(e^{\pi i\left(\omega\frac{(\mu+\varkappa)^2}{5}+(\mu+\varkappa)s\right)}\vartheta(5\omega,5s+2(\mu+\varkappa)\omega)\right)^2\right.$$
$$\left.\left(e^{\pi i\left(\omega\frac{(\mu-\varkappa)^2}{5}+(\mu-\varkappa)s\right)}\vartheta(5\omega,5s+2(\mu-\varkappa)\omega)\right)^2\left(e^{\pi i\left(\omega\frac{\mu^2}{5}+s\mu\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\mu\omega)\right\}.$$

$$\vartheta(\omega,5s).\left[\vartheta(\omega,\sigma)^5-\prod_{\lambda=0}^{\lambda=5}\vartheta\left(\omega,\sigma+\frac{2\lambda}{5}\right)\right]=25\,\vartheta(5\omega,5\sigma)\left(\prod_{\lambda=0}^{\lambda=5}e^{\pi i\left(\omega\frac{\lambda^2}{5}+s\lambda\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\lambda\omega)\right)$$
$$+5\left(e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}+s\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\omega)+e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}-s\right)}\vartheta(5\omega,5s-2\omega)\right)\sum_\mu\left(e^{\pi i\left[\frac{\omega}{5}(\mu+1)^2+s(\mu+1)\right]}\vartheta(5\omega,5s+2(\mu+1)\omega)\right)^2$$
$$\left(e^{\pi i\left[\frac{\omega}{5}(\mu-1)^2+s(\mu-1)\right]}\vartheta(5\omega,5s+2(\mu-1\omega)\right)^2e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}\mu^2+s\mu\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\mu\omega)$$
$$+5\left(e^{\pi i\left(\frac{4\omega}{5}+2s\right)}\vartheta(5\omega,5s+4\omega)+e^{\pi i\left(\frac{4\omega}{5}-2s\right)}\vartheta(5\omega,5s-4\omega)\right).\sum_\mu\left(e^{\pi i\left[\frac{\omega}{5}(\mu+2)^2+s(\mu+2)\right]}\vartheta(5\omega,5s+2(\mu+2)\omega)\right)^2$$
$$\left(e^{\pi i\left[\frac{\omega}{5}(\mu-2)^2+s(\mu-2)\right]}\vartheta(5\omega,5s+2(\mu-2)\omega)\right)^2e^{\pi i\left(\frac{\omega}{5}\mu^2+s\mu\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\mu\omega).$$

Durch Subtraction geht aus diesen beiden die einfachere Formel hervor:

$$(39)\quad \vartheta(\omega,5s).\prod_{\lambda=0}^{\lambda=5}\vartheta\left((\omega,\sigma+\frac{2\lambda}{5}\right)=\vartheta(5\omega,5\sigma)\left\{\sum_\mu\left(e^{\pi i\left(\omega\frac{\mu^2}{5}+\mu s\right)}\cdot\vartheta(5\omega,5s+2\mu\omega)\right)^5-5\prod_\mu e^{\pi i\left(\omega\frac{\mu^2}{5}+\mu s\right)}\vartheta(5\omega,5s+2\mu\omega)\right\}.$$

Auch (33) liefert für eine Summation über ι symmetrische Functionen von ähnlicher Zusammensetzung; wenn dieselben auch nicht strenge unter den Begriff der Transformationsfunctionen fallen, so scheinen sie doch zu den Ausdrücken zu gehören, bezüglich welcher sich Kiepert auf eine Bemerkung Kroneckers bezieht[1].

Diese Ergebnisse sind noch zu ergänzen durch die Schroeter'sche Transformation $5=\left|\begin{smallmatrix}1&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right|$, deren Reste Q ausser der Combination 0 0 durch die Elemente der Determinante und deren negative Werte erschöpft werden.

Für $s=0$ enthalten alle diese Formeln ebensoviele Aufschlüsse über die Wurzeln der **Multiplicatorgleichung**, Aufschlüsse, welche weniger durch Neuheit als durch Vollständigkeit einiges Interesse beanspruchen. Bedient man sich nämlich zur Abkürzung der Functionszeichen:

$$\varphi(m_\varkappa)=m_0^6+12\,m_0\,(m_1^5+m_2^5)+60m_0^2\,m_1^2\,m_2^2+40\,m_1^3\,m_2^3$$
$$\psi(m_\varkappa)=m_0^6+2m_0\,(m_1^5+m_2^5)+10m_0^2\,m_1^2\,m_2^2-10\,m_1^3\,m_2^3+5\,(\alpha+\alpha^{-1})\,m_1^5+5\,(\alpha^2+\alpha^{-2})m_2^5,\quad \alpha^5=1$$

so finden nach (33) und (34) gleichzeitig folgende Beziehungen statt:

$$(40)\qquad \vartheta(\omega,o)^6=\varphi\left(e^{\pi i\frac{\varkappa^2\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\varkappa\omega)\right),\ 125\,\vartheta(5\omega,o)^6=\varphi\left(\vartheta\left(\omega,\frac{2\varkappa}{5}\right)\right).$$

$$(41)\quad \vartheta(\omega,o)\vartheta\left(\omega,\frac{2\nu}{5}\right)^5=\psi\left(e^{\pi i\frac{\varkappa^2\nu^2\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\varkappa\nu\omega)\right),\ 125\,\vartheta(5\omega,o).\left(e^{\pi i\frac{\nu^2\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\nu\omega)\right)^5=\psi\left(\vartheta\left(\omega,\frac{2\varkappa\nu}{5}\right)\right).$$

Aus der Substitution $\left|\begin{smallmatrix}1&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right|$ ergeben sich andrerseits für:

$$f(m_\varkappa)=m_0^2+4m_1m_2,\quad F(m_\varkappa)=m_0^2-m_1m_2$$

1) Crelle-Kronecker Bd. 87, Seite 117.

die Correlate:

$$(42)\qquad \vartheta(\omega,o)^2 = f\left(e^{\pi i \frac{\varkappa^2\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\varkappa\omega)\right),\ 5\,\vartheta(5\omega,o)^2 = f\left(\vartheta\left(\omega,\frac{2\varkappa}{5}\right)\right).$$

$$(43)\qquad \vartheta(\omega,{}^2/_5)\,\vartheta(\omega,{}^4/_5) = F\left(e^{\pi i \frac{\varkappa^2\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\varkappa\omega)\right),\ 5\,e^{\frac{\pi i\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\omega).\,e^{\frac{4\pi i\omega}{5}}\vartheta(5\omega,4\omega) = F\left(\vartheta\left(\omega,\frac{2\varkappa}{5}\right)\right).$$

Bildet man nunmehr den Ausdruck:

$$B(m_\varkappa) = \frac{f(m_\varkappa)^3 - \varphi(m_\varkappa)}{12} = m_0^1\, m_1 m_2 - m_0^2\, m_1^2\, m_2^2 + 2m_1^3\, m_2^3 - m_0\,(m_1^5 + m_2^5)$$

so folgt wegen der Gleichheit der linken Seiten in (40) und (42):

$$(44)\qquad B\left(e^{\pi i\frac{\varkappa^2\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\varkappa\omega)\right) = 0,\quad B\left(\vartheta\left(\omega,\frac{2\varkappa}{5}\right)\right) = 0.$$

Es war bei Formel (6) angedeutet und darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass die hier auftretenden Functionsgrössen mit den Argumenten $2\varkappa\omega$ und $\frac{2\varkappa}{5}$ die Elemente der Wurzeln der Multiplicatorgleichung bilden. Die Function B ist der bei Brioschi[1]) ebenso, bei Kronecker-Kiepert[2]) mit b bezeichnete algebraische Ausdruck.

Der Wert derselben kann allerdings aus der explicite dargestellten Multiplicatorgleichung entnommen werden; und da, wie zunächst gezeigt werden soll, die letztere im wesentlichen schon durch die einfachere Schroeter'sche Transformation $\left|\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right|$ zu gewinnen ist, so hat man wenigstens zwischen den vollständig symmetrischen Bildungen, die aus den beiden Substitutionen hervorgehen, eine formal-algebraische Abhängigkeit anzunehmen.

Bildet man die Coefficienten der Multiplicatorgleichung aus ihren Wurzeln, so hängt die numerische Bestimmung dieser Coefficienten von den Werten (42) und (44) ab, bis auf einen Ausdruck:

$$(45)\qquad C = \frac{e^{\frac{\pi i\omega}{5}}\vartheta(5\omega,2\omega)\,e^{\frac{4\pi i\omega}{5}}\vartheta(5\omega,4\omega)}{\vartheta(5\omega,o)^2}.\ \left[\frac{\vartheta(\omega,{}^2/_5).\,\vartheta(\omega,{}^4/_5)}{\vartheta(\omega,o)^2}\right]^5$$

Geht man umgekehrt von diesem letztern aus, so liefert die Einführung der Relationen (43) zunächst:

$$[\vartheta(\omega,o)^2 - \vartheta(5\omega,o)^2].[5\vartheta(5\omega,o)^2 - \vartheta(\omega,o)^2]^5 = 4^6\vartheta(5\omega,o)^2.\,\vartheta(\omega,o)^{10}C$$

oder mit leichter Umformung:

$$\left[\left(\sqrt{5}\,\frac{\vartheta(5\omega,o)}{\vartheta(\omega,o)}\right)^2 - 1\right]^5.\ \left[5 - \left(\sqrt{5}\,\frac{\vartheta(5\omega,o)}{\vartheta(\omega,o)}\right)^2\right] = 4^6C.\left(\sqrt{5}\,\frac{\vartheta(5\omega,o)}{\vartheta(\omega,o)}\right)^2$$

das heisst die Multiplicatorgleichung:

$$(46)\qquad (z-1)^5(5-z) = 256.\,16\,C.z$$

Der Wert von C ist schon in früheren Untersuchungen auf Grund der ursprünglichen Schroeter'schen Formeln berechnet worden[3]); da jedoch Betrachtungen dabei vorkommen, die der allgemeinen Transformation angehören, so ziehen wir vor, diesen Wert unmittelbar der letzteren zu entnehmen: die allgemeine Transformation liefert nämlich, nach der beigegebenen Note:

$$(47)\qquad e^{\frac{p^2-1}{4}\omega}\,\frac{[\vartheta(p\omega,o)\,\vartheta(p\omega,1)\,\vartheta(p\omega,p\omega)]^p}{2^{p-1}\vartheta(\omega,o)\,\vartheta(\omega,1)\,\vartheta(\omega,\omega)}\,\vartheta(\omega,o)^3 = \vartheta(p\omega,o)^3\left\{\lambda\prod_{\lambda=1}^{\frac{p-1}{2}} e^{\pi i\frac{\lambda^2\omega}{p}}\vartheta(p\omega,2\lambda\omega)\right\}^6$$

1) Annali di Matematica, Tom. I, p. 256.

2) Crelle-Kronecker, Bd. 87, p. 116.

3) Goering, Untersuchungen über die Theilwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen u. s. f. § 9. Math. Annalen Bd. VII.

$$(48)\qquad \frac{[\vartheta(\omega,o)\,\vartheta(\omega,1)\,\vartheta(\omega,\omega)]^p}{2^{p-o}\,\vartheta(p\omega,o)\,\vartheta(p\omega,1)\,\vartheta(p\omega,p\omega)}\,\vartheta(p\omega,o)^3 = \vartheta(\omega,o)^3.\left(\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-1}{2}} \vartheta\left(\omega,\frac{2\lambda}{p}\right)\right)^6$$

Multipliciert man die *pte* Potenz der letzten Formel mit Formel (47) und nimmt die 6te Wurzel, über deren Vorzeichen im Zweifelfalle die allgemeine Transformationsformel Aufschluss gibt, so erhält man:

$$(49)\qquad \frac{e^{\pi i\frac{p^2-1}{21}\omega}}{2^{\frac{p^2-1}{6}}}\left[\frac{\vartheta(\omega,1)}{\vartheta(\omega,o)}\cdot\frac{\vartheta(\omega,\omega)}{\vartheta(\omega,o)}\right]^{\frac{p^2-1}{6}} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-1}{2}}\left\{\left(\frac{\vartheta\left(\omega,\frac{2\lambda}{p}\right)}{\vartheta(\omega,o)}\right)^p.\frac{e^{\pi i\frac{\lambda^2\omega}{p}}\,\vartheta(p\omega,2\lambda\omega)}{\vartheta(p\omega,o)}\right\}$$

Wird der entsprechende Wert für $p=5$ nach (45) in (46) eingeführt, so nimmt die Multiplicatorgleichung die bekannte Form an:

$$(50)\qquad (z-1)^5(5-z) = 256\,z.\left[\frac{e^{\frac{\pi i\omega}{4}}\,\vartheta(\omega,\omega)}{\vartheta(\omega,o)}\cdot\frac{\vartheta(\omega,1)}{\vartheta(\omega,o)}\right]^4 = 256\,z\,k^2k'^2$$

worin k, k' die aus der Theorie der elliptischen Integrale bekannten complementären Moduln sind.

Note über die allgemeine Transformation der Thetafunctionen.

Alle Beziehungen der vier ausgezeichneten Theta, auf welche die allgemeine Transformation zurückgreift, gehen aus der Substitution $\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}$ hervor. Schreibt man, mit einer leichten Aenderung der früheren Definition:

$$(1)\qquad \vartheta(\beta,s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\frac{[\beta n^2+sn]}{\alpha}}$$

worin β den imaginären, α den reellen Periodicitätsmodul bezeichnet, und kürzt vorläufig ab:

$$N_{i,\varkappa} = \vartheta(\beta,s_i-s_\varkappa)\,\vartheta(\beta,s_i+s_\varkappa),\ n_\varkappa = \vartheta(2\beta,2s_\varkappa),\ n'_\varkappa = e^{\pi i\left(\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{s_\varkappa}{\alpha}\right)}\vartheta(2\beta,2s_\varkappa+2\beta)$$

so besteht nach der Schroeter'schen Multiplicationsformel die Beziehung:

$$N_{i,\varkappa} = n_i\,n_\varkappa + n'_i\,n'_\varkappa$$

woraus sich das identische Verschwinden einer Determinante:

$$\left|\begin{matrix}N_{i,\varkappa}\\ {\scriptstyle i=1,2,3}\\ {\scriptstyle \varkappa=4,5,6}\end{matrix}\right| = 0$$

ergibt. Eine Relation für vier Theta desselben imaginären Moduls geht daraus hervor, indem man zwei Diagonalglieder gemäss der Bedingung: $\vartheta(\beta,\alpha+\beta)=0$ zum Verschwinden bringt, oder directer durch Bildung der Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix}N_{i,\varkappa} & N_{i,\nu}\\ N_{\mu,\varkappa} & N_{\mu,\nu}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}n_i & n'_i\\ n_\mu & n'_\mu\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}n_\varkappa & n'_\varkappa\\ n_\nu & n'_\nu\end{vmatrix} = M_{i,\mu}\,M_{\varkappa,\nu}.$$

Darin sind die Factoren der rechten Seite analoge Producte wie die $N_{i,\varkappa}$; sie entstehen aus diesen, indem man das Argument s um $\alpha+\beta$ zunehmen lässt.

Also haben wir damit das Jacobi'sche Additionstheorem:

$$(2)\qquad e^{\frac{\pi i}{\alpha}(s_1+s_2+\beta)}\,\vartheta(s_1+s_3+\alpha+\beta)\,\vartheta(s_1-s_3+\alpha+\beta)\,\vartheta(s_2+s_4+\alpha+\beta)\,\vartheta(s_2-s_4+\alpha+\beta)=$$
$$\vartheta(s_1+s_2)\,\vartheta(s_1-s_2)\,\vartheta(s_3+s_4)\,\vartheta(s_3-s_4)-\vartheta(s_1+s_4)\,\vartheta(s_1-s_4)\,\vartheta(s_2+s_3)\,\vartheta(s_2-s_3)$$

Für unseren Zweck ist der besondere Fall

$$s_1=s_4=s+\frac{\alpha+\beta}{2},\ s_2=\frac{\alpha+\beta}{2},\ s_3=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

zu bemerken, für welchen die Formel übergeht in:

$$(3)\qquad \vartheta(s)\vartheta(s+\alpha)\,\vartheta(s+\beta)\,\vartheta(s+\alpha+\beta)=\tfrac{1}{2}\,\vartheta(o)\,\vartheta(\alpha)\,\vartheta(\beta)\,\vartheta(2s+\alpha+\beta)$$

Bei dieser Gelegenheit möge noch als weitere Quelle solcher Beziehungen die Vertauschbarkeit der Argumente $s_\varkappa$ angedeutet sein.

Wir wenden uns nunmehr der ganzzahligen Transformation:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=kl$$

zu, in welcher kl eine beliebige ungrade Zahl bedeutet, deren erster Factor k als grösster Teiler von a und c ausgesondert worden ist. Diese Substitution ist nicht ohne weiteres geeignet, die Gesammtheit der ganzen Zahlen m,n wiederzuerzeugen, vielmehr stellt $m'=am+cn$ zunächst nur die Zahlen mit dem Teiler k dar. Zur Wiedererzeugung der unendlich vielen Zahlen m hat man also eine Grösse $\varkappa$ hinzuzufügen: $m'=am+cn+\varkappa$ und dieser Grösse nacheinander die Werte eines vollständigen Restensystems mod k beizulegen. Die sämmtlichen Darstellungen einer bestimmten Zahl m'_o erhält man, von einer einzelnen Darstellung m_o, n_o ausgehend, in der Form:

$$m'_o=a\left(m_o-\frac{c}{k}\mu\right)+c\left(n_o+\frac{a}{k}\mu\right)+\varkappa$$

Die zugehörigen, durch den Parameter μ auseinander hervorgehenden Zahlen

$$n'=b\left(m_o-\frac{c}{k}\mu\right)+d\left(n_o+\frac{a}{k}\mu\right)=bm_o+dn_o+\mu\,.\,l$$

unterscheiden sich nur durch Vielfache von l, — sie sind alle in der durch $n'_o=bm_o+dn_o$ bestimmten Gruppe von Resten mod l begriffen. Also eine vollständige Zuordnung der Zahlen n zu ermöglichen, tritt auch hier eine Grösse λ hinzu, welche in $n'=bm+dn+\lambda$ die Reste mod l durchläuft.

Der durch eine complexe Zahl $\frac{\beta}{\alpha}$ definierte Bestand von Zahlen $m'\alpha+n'\beta$ mit den erzeugenden Indices m', n' wird demnach ersetzt durch

$$m\alpha'+n\beta'+\varkappa\alpha+\lambda\beta$$

worin $\alpha'=a\alpha+b\beta$, $\beta'=c\alpha+d\beta$ und $\varkappa, \lambda$ die Combinationen der oben bestimmten Reste sind. Der complexe Transformationsrest $\mu=\varkappa\alpha+\lambda\beta$ nimmt wegen $\alpha=\frac{d\alpha'-b\beta'}{kl}$, $\beta=\frac{-c\alpha'+a\beta'}{kl}$ auch die Form $\mu=\frac{\varkappa'\alpha'+\lambda'\beta'}{kl}$ an, worin $\lambda'=-\varkappa b+\lambda a$, $\varkappa'=\varkappa d-\lambda c$ ist.

Diese Formen des Transformationsrestes sind insoweit keine notwendigen, als sie in ihrer Herleitung eine Bevorzugung der Erzeugenden m oder wenn man will der Transformationscoefficienten a, c enthalten. Solche Bevorzugung liegt aber nicht in der allgemeinen Aufgabe,

eine Zahlenunendlichkeit $m\alpha+n\beta$ zu transformieren; sie ergibt sich erst da, wo diese Zahlen in besonderer Functionsweise auftreten: von der Art ist ihre Existenz in unendlichen Summen und Producten, die im allgemeinen erst durch Feststellungen über die Reihenfolge der erzeugenden Indices constituiert werden. Die eben entwickelte Form des Transformationsrestes entspricht demgemäss der Feststellung, dass die auf ein Glied $f(m\alpha+n\beta)$ bezogene Summen- oder Productbildung von m auszugehen hat.

Danach erscheint eine Gleichstellung, welche die Abhängigkeit zwischen den Indices m, n und m', n' voll berücksichtigt, welche also beispielsweise auf der rechten Seite:

$$\prod_{n'=-\infty}^{n'=+\infty} \prod_{m'=-\infty}^{m'=+\infty} f(m'\alpha+n'\beta) = \prod_{m\alpha'+n\beta'+\mu} f(m\alpha'+n\beta'+\mu)$$

nicht nach m und n sondern gemäss des Zusammenhangs dieser Grössen mit m', n' summiert oder multipliciert, — eine solche Gleichstellung erscheint als eine Identität. Unterwirft man aber die Indices m, n und m', n' beziehungslos demselben Gesetze der Summen — bezüglich Productbildung:

$$\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} f(m\alpha+n\beta) \sim F_{\mu}\left\{ \prod_{n=-\infty}^{n=\infty} \prod_{m=-\infty}^{m=\infty} f(m\alpha'+n\beta'+\mu) \right\}$$

so wird die Gleichstellung problematisch, sie enthält ein Transformationsproblem.

Dies ist die von Eisenstein in seiner classischen Untersuchung der unendlichen Doppelproducte gegebene Formulierung des Problems. Die Lösung desselben hängt im übrigen von der Wahl einer geeigneten symmetrischen Function F ab, in welcher der Index μ zählt; wir haben die Existenz solcher Functionen im vorhergehenden nachgewiesen und für dieselben die Bezeichnung „Transformationsfunctionen" vorgeschlagen. Die einfachste und, soviel wir wissen, die einzige bisher behandelte ist die Function des Productes, für welche das Problem lautet: welche Veränderungen erfährt die Thetareihe bei dem Uebergang:

$$\vartheta(s+\alpha+\beta) \sim \prod_{\mu} \vartheta'(s+\alpha'+\beta'+2\mu)$$

wenn ϑ' die transformierte Reihe mit den Moduln $\alpha'=a\alpha+b\beta$ und $\beta'=c\alpha+d\beta$ ist und die Productbildung sich auf die früher definierten Transformationsreste μ erstreckt, oder, mit Vorwegnahme bekannter Ergebnisse, welchen Wert hat der Quotient:

$$\frac{\prod_{\mu} \vartheta'(s+\alpha'+\beta'+2\mu)}{\vartheta(s+\alpha+\beta)}\,?$$

Bezeichnet man mit C, Q, N vorläufig beliebige von s unabhängige Unbestimmten, so darf man unterstellen:

$$(4)\qquad C e^{\pi i Q(s+\alpha+\beta)^2}\,\vartheta(s+\alpha+\beta) = e^{\pi i N(s+\alpha'+\beta')} \prod_{\mu} \vartheta'(s+\alpha'+\beta'+2\mu).$$

Unter Bezugnahme auf die Functionalgleichung:

$$(5)\qquad \vartheta(s+2g\alpha+2h\beta) = e^{-\pi i \frac{h^2\beta+hs}{\alpha}}\,\vartheta(s)$$

findet man für $a\equiv a'$, $b\equiv b'$ $c\equiv c'$, $d\equiv d'$ (mod 2) eine Umformung

$$(6)\qquad \vartheta(s+\alpha+\beta-\alpha')\,\vartheta(s+\alpha+\beta-\beta')\,\vartheta(s+\alpha+\beta-\alpha'-\beta') =$$

$$e^{\pi i \frac{T}{2\alpha}}\,\vartheta(s+\alpha(1-a')+\beta(1-b'))\,\vartheta(s+\alpha(1-c')+\beta(1-d'))\,\vartheta(s+\alpha(1-a'-c')+\beta(1-b'-d'))$$

Für ungrade Transformationen kl müssen sich darin die drei Argumente in irgend einer Reihenfolge auf $s, s+\alpha, s+\beta$ reducieren. Schreibt man also zur Abkürzung:

$$(7)\qquad Q[(s+\alpha+\beta)^2+(s+\alpha+\beta-\alpha')^2+(s+\alpha+\beta-\beta')^2+(s+\alpha+\beta-\alpha'-\beta')^2] = \frac{M}{2\alpha}$$

so folgt aus (4)

$$C^4 . e^{\frac{\pi i(M+T)}{2\alpha}} \vartheta(s+\alpha+\beta)\vartheta(s)\vartheta(s+\alpha)\vartheta(s+\beta)$$
$$= e^{2\pi i N(2s+\alpha'+\beta')} \prod_\mu \vartheta'(s+\alpha'+\beta'+2\mu)\vartheta'(s+2\mu)\vartheta'(s+\alpha'+2\mu)\vartheta'(s+\beta'+2\mu)$$

oder wenn man beiderseits die Werte (3) einführt:

$$(8) \qquad C^4 . e^{\frac{\pi i(M+T)}{2\alpha}} \frac{\vartheta(o)\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta)}{2} \cdot \vartheta(2s+\alpha+\beta)$$
$$= e^{2\pi i N(2s+\alpha'+\beta')} \cdot \left[\frac{\vartheta'(o)\vartheta'(\alpha')\vartheta'(\beta')}{2}\right]^{kl} \cdot \prod \vartheta'(2s+\alpha'+\beta'+4\mu).$$

Setzt man in (4) $s+\alpha'+\beta'$, in (8) $2s+\alpha'+\beta'$ gleich Null und bezeichnet die den M und T entsprechenden Coefficienten mit M' und T', dividiert darauf die Ergebnisse, so erhält man für C die Bestimmungsgleichung:

$$(9) \qquad C^3 . e^{\frac{\pi i}{2\alpha}[(M'+T')-2\alpha Q(\alpha+\beta-\alpha'-\beta')^2]} \frac{\vartheta(o)\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta)}{2} = \left[\frac{\vartheta'(o)\vartheta'(\alpha')\vartheta'(\beta')}{2}\right]^{kl} \prod_\mu \frac{\vartheta'(4\mu)}{\vartheta'(2\mu)}.$$

Der Quotient $\prod_\mu \frac{\vartheta'(4\mu)}{\vartheta'(2\mu)}$ ist eine leicht auszuwertende Exponentialgrösse; durch eine mehr umständliche als schwierige Rechnung liefert die Functionalgleichung (5) die übrigen unbestimmten Coefficienten M', T', Q, N.

Das Gesammtergebniss gibt die folgende Zusammenstellung:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\vartheta(s+\alpha+\beta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{\alpha}[\beta n^2+(s+\alpha+\beta)n]}, \quad \vartheta'(s+\alpha'+\beta') = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\alpha'}[\beta' n^2+(s+\alpha'+\beta')n]} \\ &\qquad \alpha' = a\alpha+b\beta, \quad \beta' = c\alpha+d\beta \\ &\qquad ad-bc=kl, \ k \text{ grösster Teiler von } a \text{ und } c. \\ &\qquad \delta = e^{\frac{\pi i}{2}[bc-(a-1)b-1)-(c-1)(d-1)+ad^2+cb^2-1]} \\ &C^3 = \delta . e^{-\frac{3\pi i}{\alpha'}\left[\beta' \sum_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{-\varkappa b+\lambda a}{kl}\right)^2+\frac{(\alpha+\beta)^2 b}{4\alpha}\right]+\frac{\pi i}{2\alpha}(\alpha'+\beta')(kl-a+b)} \frac{[\vartheta'(o)\vartheta'(\alpha')\vartheta'(\beta')]^{kl}}{2^{kl-1}\vartheta(o)\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta)} \\ &C . e^{\pi i \frac{b(s+\alpha+\beta)^2}{4\alpha\alpha'}} \vartheta(s+\alpha+\beta) = e^{\pi i \frac{s+\alpha'+\beta'}{2\alpha'}\left(2\sum_{\varkappa\lambda}\frac{-\varkappa b+\lambda a}{kl}+kl-a+b\right)} \prod_{\substack{\varkappa \bmod k \\ \lambda \bmod l}} \vartheta'(s+\alpha'+\beta'+\varkappa\alpha+\lambda\beta). \end{aligned} \right.$$

Druckfehler-Verzeichniss.

Seite 3, Zeile 5 von unten lese man Q_ϱ statt P_ϱ.

„ 10 u. 11 sind mehrfach die Argumente s u. σ vertauscht.

„ 13, Formel 48 lese man 2^{p-1} statt $2^{p-\sigma}$

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

1. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände.

	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Summa
Katholische Religionslehre	3	2	2	2	2	2	2	2		17
Evangelische Religionslehre	2			2				2		6
Deutsch	3	2	2	2	2	2	2	3	3	21
Latein	9	9	9	9	9	8	8	8	8	77
Griechisch	—	—	—	7	7	7	7	6	6	40
Französisch	—	4	5	2	2	2	2	2	2	21
Hebräisch (fakultativ)	—	—	—	—	—	—	2	2		4
Geschichte und Geographie	3	3	4	3	3	3	3	3	3	28
Rechnen und Mathematik	4	4	4	3	3	4	4	4	4	34
Naturbeschreibung	2	2	2	2	2	—	—	—	—	10
Physik	—	—	—	—	—	2	2	2	2	8
Schreiben	2	2	—	—	—	—	—	—	—	4
Zeichnen	2	2	2	2 fakultativ						8
Gesang	2	2	2 Stunden Chorübungen							6
Turnen	2		2			2				6

2. Übersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

a. im Sommer-Semester 1888.

Die in Klammern eingeschlossenen Unterrichtsgegenstände hat der betreffende Lehrer im Laufe des Semesters von einem andern übernommen.

Lehrer.	Ordinarius in	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	Zahl der Stunden
1. Dr. A. Waldeyer, Direktor.		4 Griech.	2 Homer 2 Horaz								8
2. Prof. Th. Heicks, Oberlehrer.	I a	8 Latein 2 Homer		5 Griech. 2 Hebr.							17
3. H. Brüggemann, Oberlehrer.	II a	3 Gesch.	3 Gesch.	8 Latein 2 Deutsch 3 Gesch.							19
4. Fr. J. Wildt, Oberlehrer.	I b		6 Latein 4 Griech. 3 Deutsch		3 Gesch. 2 Homer						18
5. Fr. Petit, Oberlehrer.	III a	2 Franz.	2 Franz.	2 Franz. 2 Homer		7 Latein 3 Gesch.					18
6. Dr. K. Velten, Oberlehrer.		4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik	4 Math.						22
7. J. Müller, Oberlehrer.		2 Religion 2 Hebräisch		2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion	3 Religion	19
8. B. Brockhues, Gymnasiallehrer.					2 Virgil	2 Franz. 2 Deutsch	2 Franz.	5 Franz.	4 Franz.	4 Rechn.	21
9. Dr. J. Unger, Gymnasiallehrer.	II b				6 Latein 2 Deutsch 5 Griech. 2 Franz.			4 Gesch. und Geogr.			19
10. Dr. Fr. Schumacher, Gymnasiallehrer, zugleich Turnlehrer.	III b	3 Deutsch					7 Latein 2 Deutsch		4 Rechnen		22 (einschl. 6 Turnstund.)
11. P. Christa, Gymnasiallehrer.	IV						7 Griech. 2 Ovid	9 Latein 2 Deutsch			20
12. V. Mertens, Gymnasiallehrer.					2 Physik	3 Math. 2 Nat.	3 Math. 2 Nat.	4 Math. 2 Nat.	2 Nat.	2 Nat.	22
13. Dr. J. Teusch, Gymnasiallehrer.	V					7 Griech. 2 Ovid			9 Latein 2 Deutsch		20
14. Dr. A. Chambalu, Gymnasiallehrer.	VI						3 Gesch.		3 Gesch. und Geogr.	9 Latein 3 Deutsch 3 Gesch. u. Geogr.	21
15. Dr. H. Schwarz, Kandidat des höhern Schulamts.					[2 Dtsch.] [3 Gesch.]						5
16. Cl. Schwertführer, Kandidat des höh. Schulamts.				[2 Physik]							2
17. H. Josten, Kand. d. höh. Schulamts.						[2 Dtsch.]					2
18. K. Rochels, Probekandidat.							[2 Dtsch.] [2 Ovid]		[2 Dtsch.]		6
19. Dr. Hermens, Divisionspfr., ev. Religionslehrer.		Cötus I: 2 Religion		Cötus II: 2 Religion				Cötus III: 2 Religion			6
20. H. Kipper, Gesanglehrer.		2 Stunden Chorübungen							2 Gesang	2 Gesang	6
21. J. Dreesen, Zeich. u. Schreiblehrer.		2 kombinierte Zeichenstunden						2 Zeichnen	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	12

2. Übersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

b. im Winter-Semester 1888–89.

Die in Klammern eingeschlossenen Unterrichtsgegenstände hat der betreffende Lehrer im Laufe des Semesters von einem andern übernommen.

Lehrer.	Ordinarius in	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	Zahl der Stunden.
1. **Dr. A. Waldeyer.** Direktor.		4 Griech.	2 Homer 2 Horaz								8
2. **Prof. Th. Heicks.** Oberlehrer.	I a	8 Latein 2 Homer		5 Griech. 2 Hebr.							17
3. **H. Brüggemann,** Oberlehrer.	II a	3 Gesch.	3 Gesch.	8 Latein 2 Deutsch 3 Gesch.							19
4. **Fr. J. Wildt.** Oberlehrer.	I b		6 Latein 4 Griech. 3 Deutsch		3 Gesch. 2 Homer						18
5. **Fr. Petit.** Oberlehrer.	III a	2 Franz.	2 Franz.	2 Franz. 2 Homer		7 Latein 3 Gesch.					18
6. **Dr. K. Velten,** Oberlehrer.		4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik	4 Math.						22
7. **J. Müller,** Oberlehrer.		2 Religion 2 Hebräisch (I a und I b)		2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion	3 Religion	19
8. **B. Brockhues,** Gymnasiallehrer.					2 Virgil	2 Franz. 2 Deutsch	2 Franz.	5 Franz.	4 Franz.	4 Rechn.	21
9. **Dr. J. Unger,** Gymnasiallehrer.	II b				6 Latein 2 Deutsch 5 Griech. 2 Franz.			4 Gesch. u. Geogr.			19
10. **Dr. Fr. Schumacher.** Gymnasiallehrer, zugleich Turnlehrer.	III b	3 Deutsch					7 Latein 2 Deutsch		4 Rechnen		22 einschl. 6 Turnstunden
11. **P. Christa.** Gymnasiallehrer.	IV						7 Griech. 2 Ovid	9 Latein 2 Deutsch			20
12. **V. Mertens.** Gymnasiallehrer.					2 Physik	3 Math. 2 Nat.	3 Math. 2 Nat.	4 Math. 2 Nat.	2 Nat.	2 Nat.	22
13. **Dr. J. Teusch,** Gymnasiallehrer.	V					7 Griech. 2 Ovid			9 Latein 2 Deutsch		20
14. **Dr. A. Chambalu.** Gymnasiallehrer.	VI						3 Gesch.		3 Gesch. u. Geogr.	9 Latein 3 Deutsch 3 Gesch. u. Geogr.	21
15. **Dr. H. Schwarz,** Kandidat d. höh. Schulamts.					[2 Dtsch.] [3 Gesch.]						5
16. **Clem. Schwertführer,** Kand. d. höh. Schulamts.				[2 Physik]							2
17. **H. Josten.** Kand. des höh. Schulamts.						[2 Dtsch.]					2
18. **K. Rochels.** Probe-Kandidat.								[4 Latein]		[3 Dtsch.]	7
19. **Fr. Krentzberg.** Probe-Kandidat.									[4 Rechn.] [2 Nat.]		6
20. **Dr. Hermens,** Divisionspfarr., ev. Religionslehrer.		Cötus I: 2 Religion (I a – II a)			Cötus II: 2 Religion (II b – III b)			Cötus III: 2 Religion (IV – VI)			6
21. **H. Kipper,** Gesanglehrer.		2 Stunden Chorübungen (I a – IV)							2 Gesang	2 Gesang	6
22. **J. Dreesen,** Zeich. u. Schreiblehrer.		2 kombinierte Zeichenstunden (I a – III b)						2 Zeichnen	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	12

3. Übersicht über die während des Schuljahres 1888–1889 behandelten Lehraufgaben.

Oberprima.

Ordinarius: Professor Heicks.

1. **Religionslehre:** 2 St. a) Katholische: Die Lehre von Gott dem Schöpfer und Erlöser. Die Sakramentenlehre. Wiederholungen aus der Sittenlehre und der Kirchengeschichte.
Religions- und Oberlehrer Müller.

b) Evangelische, kombiniert mit Unterprima: Glaubens- und Sittenlehre. Wiederholung früherer Lehrabschnitte. Lektüre ausgewählter Abschnitte aus dem Neuen Testament, zum Teil im Urtext. Divisionspfarrer Dr. Hermens.

2. **Deutsch:** 3 St. Geschichte der deutschen Litteratur seit Opitz nach ihren Hauptvertretern und wichtigsten Denkmälern. Lektüre und Deklamation nach der Auswahl von Worbs. Erklärung von Göthes Iphigenie. Besprechung geeigneter Abschnitte aus Lessings Dramaturgie. Die Elemente der Psychologie. Versuche in freien Vorträgen. Aufsätze.
Dr. Schumacher.

Aufgaben für die deutschen Aufsätze: 1. Max Piccolomini und der Prinz von Homburg, eine Vergleichung. 2. Aufbau der Handlung in Schillers „Maria Stuart". 3. Ans Vaterland, ans teure, schliefs dich an, — Das halte fest mit deinem ganzen Herzen! 4. Gedanken an der Bahre der entschlafenen Kaiser Wilhelm I. und Friedrich III. (Ein Brief an einen fernen Freund.) (Klassen-Aufsatz.) 5. Charakteristik des Majors von Tellheim. 6. Gedankengang in Klopstocks Ode: a) „Der Lehrling der Griechen"; b) „Unsere Sprache". 7. Arbeit und Fleifs, das sind die Flügel, — So führen über Strom und Hügel. (Fischart.) (Klassenaufsatz.) 8. In den Ocean schifft mit tausend Masten der Jüngling, — Still auf gerettetem Boot treibt in den Hafen der Greis. (Schiller.)

Aufgabe für den Abiturienten-Aufsatz: Not entwickelt Kraft.

3. **Latein:** 8 St. a) 6 St. Erörterungen aus dem Gebiete der Grammatik und Stilistik. Mündliche Übersetzungen nach Hemmerling. Übungen im Lateinsprechen in Verbindung mit der Lektüre. Memorieren ausgewählter Stellen. Extemporalien, Skripta, Aufsätze. Lektüre: Cic. de oratore lib. I. Tacit. Annal. I u. II. Kursorische Lektüre aus Livius.

b) 2 St. Horat. Carm. III u. IV. Einige Satiren und Episteln. Prof. Heicks.

Aufgaben für die lateinischen Aufsätze: 1. Vivitur parvo bene, cui paternum — splendet in mensa tenui salinum 2. Quattuor illas virtutes, quas in summo imperatore Cicero oportere dicit inesse, summas fuisse in Scipione maiore ostenditur. 3. Deleta Carthago quae commoda et rursus quae incommoda rei Romanae attulerit. 4. Romanos bis salutem debuisse Arpinatibus. (Klassenaufsatz) 5. Legatio Achivorum ad Achillem cum Agamemnone reconciliandum missa narratur. 6. Augusti vita apud aequales vario extollebatur arguebaturve. 7. Vel pace vel bello clarum fieri licet. (Klassenaufsatz.) 8. Quo tempore populus Romanus maximus fuisse videatur. 9 Litterarum studia rebus adversis perfugium praebent et solatium.

Aufgabe für den Abiturienten-Aufsatz; Utrum Athenienses an Lacedaemonii plus valuerint ad Graeciam a Persis liberandam.

4. **Griechisch:** 6 St. a) 4 St. Wiederholungen aus der Grammatik von Curtius. Skripta. Extemporalien. Lektüre: Demosth. Orat. Olynth. Thucyd. I. II mit Auswahl. Kursorische Übersetzung ausgewählter Stellen aus leichteren historischen Schriften. Dr. Waldeyer.

b) 2 St. Hom. Il. XI. XII. XVI. XVIII. XX. XXIV. Sophokl. Antigone.

Prof. Heicks.

5. **Französisch:** 2 St. Wiederholung der schwierigeren Teile der Syntax nach Plötz II. Extemporalien. Lektüre: Montesquieu, Considérations sur les causes de la grandeur des Romains et de leur décadence. Corneille, le Cid. Petit.

6. **Hebräisch:** 2 St. Unregelmäfsige Verba. Das Verbum mit Suffixen. Pronomen, Nomen, Zahlwörter und Partikeln. Im Anschlusse an die Lektüre leichterer Abschnitte aus den historischen Büchern des A. T. und einiger Psalmen Erklärung der wichtigsten syntaktischen Regeln nach Vosens Leitfaden. Müller.

7. **Geschichte** und **Geographie:** 3 St. Neuere Geschichte mit besonderer Hervorhebung der vaterländischen nach Pütz. Wiederholung der Geschichte des Altertums und des Mittelalters. Wiederholungen aus der Geographie. Brüggemann.

8. **Mathematik:** 4 St. Stereometrie (nach Boyman). Zinseszins- und Rentenrechnung. Permutationen, Variationen und Kombinationen. Der binomische Lehrsatz (nach Schmidt). Wiederholung der Algebra, Planimetrie und Trigonometrie. Fortgesetzte Übungen in den geometrischen Konstruktionen. Dr. Velten

Prüfungsaufgaben für die Abiturienten: a) Planimetrische: Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte A und B geht und eine gegebene Gerade L berührt. b) Stereometrische: Eine Holzkugel, deren Radius $r = 5$ cm ist, sinkt im Wasser 4,33 cm ein; wie grofs ist das spez. Gewicht des Holzes? c) Algebraische: $3.4^{x} + \frac{1}{3} 9^{x+2} = 6.4^{x+1} - \frac{1}{2} 9^{x+1}$. d) Trigonometrische: Die Höhe eines Turmes beträgt $a = 15$ m und seine Entfernung von dem Ufer eines Flusses $b = 30$ m. Wie grofs ist die Breite des Flusses, wenn sie von der Spitze des Turmes unter dem Winkel von $\beta = 15^{0}$ erscheint?

9. **Physik:** 2 St. Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung fester Körper. Mathematische Geographie. Dr. Velten.

Unterprima.

Ordinarius: Oberlehrer Wildt.

1. **Religionslehre:** 2 St. a) Katholische: Siehe Oberprima.

b) Evangelische: Siehe Oberprima.

2. **Deutsch:** 3 St. Übersicht über die Entwickelung der deutschen Litteratur bis auf Opitz, mit besonderer Hervorhebung des Nibelungenliedes und Walthers von der Vogelweide. Erklärung von Schillers Wallenstein. Besprechung von Lessings Laokoon. Lektüre und Deklamation nach Worbs. Die Elemente der Logik. Versuche in freien Vorträgen. Dispositionsübungen. Aufsätze.

Wildt.

Aufgaben für die deutschen Aufsätze: Gefährlich sind des Ruhmes hohe Bahnen. 2. a) Welche Züge mildern das Grauenhafte in Hagens Charakter? b) Charakteristik der Gudrun. 3. a) Der Wert der Poesie. b) Kunst- und Volkspoesie. c) Das Drama, der Poesie höchste Stufe. 4. Eile mit Weile! (Klassenaufsatz.) 5. a) Die beiden Piccolomini. b) Wallensteins Verirrung und sein Fall. c) Buttlers Rache. d) Charakteristik Wallensteins aus den Reden seiner Soldaten. 6. Im engen Kreis verengert sich der Sinn. — Es wächst der Mensch mit seinen gröfsern Zwecken. 7. a) Thibaut d'Arc und seine Tochter. b) Schuld der Jungfrau von

Orleans. c) Läuterung der Jungfrau von Orleans. 8. Principiis obsta, sero medicina paratur. (Klassenaufsatz.) 9 a) Weshalb versucht Mortimer die Königin Maria Stuart zu befreien? b) Die Zusammenkunft der beiden Königinnen im Parke zu Fortheringhay. c) Wie charakterisiert Schiller die Zeit, in welcher das Drama Maria Stuart spielt? d) Aus welchen Gründen erkennt Maria Stuart das über sie gefällte Urteil nicht als gültig an? e) Wie sucht Schiller in seinem Drama Maria Stuart den innigsten Anteil für die Heldin zu erwecken? 10. a) Gedankengang der ersten sechs Kapitel von Lessings Laokoon. b) Gedankengang der Abhandlung Lessings über das Epigramm. c) Gedankengang der Abhandlung J. Grimms: „Das Wesen der Tierfabel." 11. Ein andres Antlitz, eh' sie geschehen, — Ein anderes zeigt die vollbrachte That. (Klassenaufsatz.)

3. **Latein:** 8 St. a) 6 St. Wiederholungen aus dem ganzen Gebiete der Grammatik. Das Wichtigste aus der Stilistik. Mündliche Übersetzungen nach Hemmerling. Übungen im Lateinsprechen in Verbindung mit der Lektüre. Extemporalien. Skripta. Aufsätze. Lektüre: Cic. Tusc. V. Liv. XXI. Kursorische Lektüre aus Sallust. bell. Catil. Wildt.

b) 2 St. Horat. Carm. I, II. Einige Satiren Memorieren ausgewählter Oden.

Dr. Waldeyer.

Aufgaben für die lateinischen Aufsätze: 1. Multas saepe virtutes ex rebus adversis effloruisse res Romanae docent. 2. Quam mobilis sit aura popularis. 3. Cur Alcibiades in magnorum virorum numero non sit habendus. 4. Maximae cuique fortunae minime credendum est. (Klassenaufsatz.) 5. Graeci cum adversus Persas libertatem defendere potuissent, cur non potuerint adversus Philippum, Macedonum regem. 6. Quo modo factum sit, ut Pyrrhus, Epirotarum rex, compluribus proeliis victor ad extremum a Romanis vinceretur. 7. Bella saepe non minus profuerunt, quam nocuerunt. 8. Invidia gloriae comes est. (Klassenaufsatz). 9. Priusquam incipias, consulto et, ubi consulueris, mature facto opus est. 10. Respublica Romana quibus virtutibus floruerit, quibus conciderit vitiis, Sallustio duce exponatur. 11. Sibi imperare maximum imperium est. (Klassenaufsatz.)

4. **Griechisch:** 6 St. a) 4 St. Wiederholungen aus dem Lehrpensum der Obersekunda. Kochs Grammatik § 131. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Platos Apologie, Krito und Euthyphro. Kursorische Lektüre aus Xenophons historischen Schriften. Wildt.

b) 2 St. Hom. Il. I, II, IV, V, VI, IX. Dr. Waldeyer.

5. **Französisch:** 2 St. Wiederholungen aus der Grammatik. Extemporalien. Lektüre: Mignet, Histoire de la révolution Française depuis 1789 jusqu'en 1814. Racine, Iphigénie.

Petit.

6. **Hebräisch:** 2 St. Siehe Oberprima.

7. **Geschichte und Geographie:** 3 St. Geschichte des Mittelalters nach Pütz. Wiederholungen aus der Geographie. Brüggemann.

8. **Mathematik:** 4 St. Die Trigonometrie und der erste und zweite Abschnitt der Stereometrie (nach Boyman). Wiederholung der Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen und der Gleichungen zweiten Grades mit mehrern Unbekannten. Reziproke Gleichungen. Diophantische und Exponential-Gleichungen. Die arithmetischen und geometrischen Progressionen (nach Schmidt). Übungen in der geometrischen Konstruktion. Dr. Velten.

9. **Physik:** 2 St. Die Lehre vom Schalle und Lichte (nach Boyman). Dr. Velten.

Obersekunda.

Ordinarius: Oberlehrer Brüggemann.

1. **Religionslehre:** 2 St. a) Katholische: Von der Religion und Offenbarung im Allgemeinen. Offenbarungsstufen und Offenbarungsurkunden. Die Göttlichkeit der christlichen Religion. Die Lehre von der Kirche. Lektüre ausgewählter Abschnitte aus dem N. T. nach dem Urtexte. Müller.

b) Evangelische. kombiniert mit Untersekunda, Ober- und Untertertia: Erläuterungen einiger Katechismusstücke. Lebensbilder aus der Kirchengeschichte. Memorieren von Kirchenliedern und Bibelabschnitten. Dr. Hermens.

2. **Deutsch:** 2 St. Dispositionslehre und im Anschlusse daran die abhandelnde Prosa und die Rede. Erklärung von Schillers Tell nach voraufgeschickter Einleitung in die dramatische Poesie. Lektüre und Deklamation aus Worbs. Übungen im mündlichen Vortrage Dispositionen und Aufsätze. Brüggemann

Aufgaben für die deutschen Aufsätze: 1. Weshalb verschmäht der Sänger in Göthes gleichnamigem Gedichte die goldene Kette und wünscht sich einen Becher Weins in purem Golde? 2. Welche Person in Göthes „Hermann und Dorothea“ gefällt mir am besten? 3. Schwert und Feder. 4. Hermann und Dorothea. oder Gottes Wege sind wunderbar. (Klassenaufsatz.) 5. „Gefährlich ist's, den Leu zu wecken. — Verderblich ist des Tigers Zahn; — Doch der schrecklichste der Schrecken. — Das ist der Mensch in seinem Wahn.“ 6. Hannibal und Scipio. 7. Concordia parvae res crescunt, Discordia vel maximae dilabuntur. (Klassenaufsatz) 8. Rom und Carthago. 9. Ist die Erschiefsung Gefslers durch Tell im Schillerschen Schauspiele gerechtfertigt? 10. Tell in Schillers Schauspiel. (Klassenaufsatz.)

3. **Latein:** 8 St. a) 6 St. Syntax nach Meiring-Fisch Kap. 88—98. Erörterungen aus der Synonymik Mündliche Übersetzungen aus Hemmerling, I. Teil. Extemporalien. Skripta. Kleine Aufsätze. Versuche im Lateinsprechen. — Cic. de imp. Cn. Pompei. Liv. I, II mit Auswahl.

b) Verg. Aen. VIII, IX, XII. Brüggemann.

4. **Griechisch:** 7 St. a) 5 St. Wiederholung des Wichtigsten aus dem Lehrpensum der Untersekunda. Kochs Grammatik § 91—130. Mündliche Übersetzungen nach Halm. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Herod I. VII. VIII mit Auswahl. Xenoph. Cyrop. I, VIII mit Auswahl. Prof. Heicks.

b) 2 St. Hom. Odyss. IX, XII, XIV. XVI, XIX. Petit.

5. **Französisch:** 2 St. Beendigung der Grammatik nach Plötz II. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Ségur, Histoire de Napoléon et de la grande armée en 1812. Petit.

6 **Hebräisch:** 2 St. Leseübungen. Die Formenlehre nach Vosens Grammatik. Übersetzung und Erklärung leichterer Stellen aus Vosens Lesebuch. Prof. Heicks.

7. **Geschichte** und **Geographie:** 3 St. Wiederholung der orientalischen und griechischen Geschichte. Die römische Geschichte nach Pütz. Geographie von Europa. Brüggemann.

8. **Mathematik:** 4 St. Wiederholung des Pensums der Untersekunda. Die Ausmessung des Kreises. Harmonische, polarische Potenz- und Ähnlichkeitsbeziehungen der Kreise. Der erste Abschnitt der Trigonometrie (nach Boyman). Übungen in der geometrischen Konstruktion. Die Rechnung mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen des zweiten Grades mit mehrern Unbekannten. Reziproke Gleichungen (nach Schmidt). Dr. Velten.

9. **Physik:** 2 St. Die Lehre von dem Magnetismus und der Elektrizität (nach Boyman). Dr. Velten.

Untersekunda.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Unger.

1. **Religionslehre:** 2 St. a) Katholische: Die Sittenlehre. Wiederholungen aus der Lehre von Gott dem Heiliger und Vollender. Erklären und Memorieren einiger kirchlicher Hymnen. Müller.

b) Evangelische: Siehe Obersekunda.

2. **Deutsch:** 2 St. Wiederholung der Metrik. Lehre von den Tropen und Figuren, an Beispielen und gelesenen Dichtungen erläutert. Kurze Einführung in die Dichtungsarten. Erklärung von Göthes Hermann und Dorothea. Lektüre und Deklamation nach dem Lesebuche von Pütz. Übungen im mündlichen Vortrag. Alle vier Wochen ein Aufsatz. Dr. Unger.

Aufgaben für die deutschen Aufsätze: 1. Cyrus des Jüngeren Leben und Charakter. (Nach Xenoph. Anab.) 2. Die Macht des Sängers. (Nach den gelesenen Gedichten von Göthe, Schiller und Uhland.) 3. Die Bedeutung Phöniziens. 4. Der Taucher. In vier Bildern dargestellt. (Klassenaufsatz.) 5. Die Sprache des Herbstes. 6. Die wesentlichsten Unterschiede der Lykurgischen und Solonischen Verfassung und ihre Folgen für die Entwicklung von Sparta und Athen. 7. Was unten tief dem Erdensohne das wechselnde Verhängnis bringt, das schlägt an die metallne Krone, die es erbaulich weiter klingt. (Klassenaufsatz.) 8. Der Rhein, des deutschen Lebens Bild und Zeuge. 9. Weshalb ist der Charakter Hermanns in Göthes „Hermann und Dorothea" ein durchaus deutscher? 10. Die Vorfabel in „Hermann und Dorothea". (Klassenaufsatz.)

3. **Latein:** 8 St. a) 6 St. Wiederholung und Erweiterung der Syntax nach Meiring-Fisch, Kap. 74—87. Erklärung wichtiger Synonymen. Mündliche Übersetzungen aus Hemmerling. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Cic. Cat. I, III, pro Archia poeta, pro rege Deiotaro. Dr. Unger.

b) 2 St. Virg. Aen. I. II. Brockhues.

4. **Griechisch:** 7 St. a) 5 St. Wiederholung des Wichtigsten aus dem Lehrpensum der Unter- und Obertertia, Partikeln und Wortbildung. Syntax nach Kochs Grammatik § 69—90. Mündliche Übersetzungen ins Griechische nach Halm. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Xenoph. Anab. II—V. Dr. Unger.

b) 2 St. Hom. Odyss. I, II, V, VI, VII. Wildt.

5. **Französisch:** 2 St. Grammatik nach Plötz II von Lektion 50—70. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Michaud, Première croisade. Dr. Unger.

6. **Geschichte** und **Geographie:** 3 St. Alte Geschichte mit Ausschlufs der römischen nach Pütz. Geographie der aufsereuropäischen Weltteile. Wildt.

7. **Mathematik:** 4 St. Wiederholung des Pensums der Obertertia. Proportionalität der Seiten des Dreiecks. Ähnlichkeit der Dreiecke. Die Transversalen im Dreiecke und Kreise. Ausmessung geradliniger Figuren (nach Boyman). Übungen in der geometrischen Konstruktion. Gleichungen des ersten Grades mit mehrern Unbekannten, Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten, Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln (nach Schmidt). Dr. Velten.

8. **Physik:** 2 St. Allgemeine Einleitung; Elemente der Chemie; Wärmelehre. (Boyman). Mertens.

Obertertia.

Ordinarius: Oberlehrer Petit.

1. **Religionslehre:** 2 St. a) Katholische: Das System des katholischen Kirchenjahres. Das Wichtigste aus der kirchlichen Liturgik. Die Kirchengeschichte in biographischer Behandlung mit besonderer Berücksichtigung der Christianisierung Deutschlands. Erklärung einiger kirchlicher Hymnen. Müller.

b) Evangelische: Siehe Obersekunda.

2. **Deutsch:** 2 St. Übersichtliche Wiederholung der Satz- und Interpunktionslehre nach dem Leitfaden von Buschmann. Die Elemente der Metrik. Lektüre und Deklamation nach dem Lesebuch von Linnig, II. Teil. Alle drei Wochen ein Aufsatz. Brockhues.

3. **Latein:** 9 St. a) 7 St. Wiederholung des Lehrpensums der Untertertia. Die Beendigung der Syntax nach Meiring Kap. 99 bis zu Ende, mit Musterbeispielen. Mündliches Übersetzen aus Ostermann. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Caesar de b. g. II, III, IV. Petit.

b) 2 St. Ovid. Metamorph. III, IV, V. VI, VII, VIII mit Auswahl. Dr. Teusch.

4. **Griechisch:** 7 St. Wiederholung des Lehrpensums der Untertertia. Beendigung der Formenlehre nach Koch. Das Nötigste aus der Lehre von den Partikeln, den Präpositionen und der Wortbildung. Mündliche und schriftliche Übersetzungen nach Wesener. Extemporalien und Skripta. Im Wintersemester Xenoph. Anab. I. Dr. Teusch.

5. **Französisch**: 2 St. Grammatik nach Plötz II, Lektion 35—49. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Rollin, Hommes illustres. Brockhues.

6. **Geschichte** und **Geographie:** 3 St. Deutsche Geschichte seit der Reformation nach Pütz. Übersicht der brandenburgisch-preufsischen Geschichte bis zum grofsen Kurfürsten; von da ab in weiterer Ausführung. Daneben Repetition aus dem Lehrpensum der Untertertia. Geographie Deutschlands, insbesondere des preufsischen Staates. Petit.

7. **Mathematik:** 3 St. a) Lehre vom Kreise und von der Gleichheit gradliniger Figuren; Lösung geometrischer Aufgaben. (Boyman.) b) Lehre von den Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten. (Schmidt.) Mertens.

8. **Naturkunde:** 2 St. Die Lehre vom Baue des menschlichen Körpers. Elemente der Mineralogie. (Leunis.) Mertens.

Untertertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Schumacher.

1. **Religionslehre** 2 St. a. Katholische: Die Lehre von der Gnade, den Sakramenten, den Sakramentalien und dem Gebete. Die biblische Geschichte des neuen Testamentes von der Auferstehung bis zum Schlusse, nach Overberg-Erdmann. Erklärung und Memorieren einiger kirchlicher Hymnen. Müller.

b. Evangelische: Siehe Obersekunda.

2. **Deutsch**: 2 St. Der zusammengesetzte Satz. Einteilung der Konjunktionen. Interpunktionslehre nach dem Leitfaden von Buschmann. Lektüre und Deklamation nach dem Lesebuche von Linnig, II. Teil. Memorieren von Volksliedern. Alle drei Wochen ein Aufsatz.
Dr. Schumacher.

3. **Latein**: 9 St. a) 7 St. Wiederholungen aus Meiring Kap. 82—90, dazu 90—99 mit Musterbeispielen. Mündliche Übersetzungen aus Ostermann. Extemporalien und Skripta. Lektüre: Caes. de bello gall. I. II. III. Dr. Schumacher.

b) 2 St. Ovid. Metamorph. mit Auswahl. Das Nötigste aus der Prosodie und Metrik.
Christa.

4. **Griechisch**: 7 St. Formenlehre nach Koch bis zum verb. liquidum. Praesens und Imperfektum von εἰμί. Memorieren von Vokabeln. Mündliche und schriftliche Übersetzungen nach Wesener I. Von Pfingsten ab regelmäfsige Extemporalien und Skripta. Christa.

5. **Französisch:** 2 St. Wiederholung der Formenlehre, dann Plötz Schulgrammatik, Lektion 7—35. Extemporalien. Skripta. Lektüre: Rollin, Hommes illustres. Brockhues.

6. **Geschichte** und **Geographie:** 3 St. Wiederholung der Hauptdaten aus der Chronologie. Deutsche Geschichte bis zur Reformationszeit nach Pütz. Geographie Europas.
Dr. Chambalu.

7. **Mathematik:** 3 St. a) Ungleichheit von Seiten und Winkeln im Dreieck. Die Transversalen des Dreiecks. Das Viereck. Dreieck-Konstruktionen. (Boyman.) b) Die vier Spezies mit einfachen und zusammengesetzten algebraischen Gröfsen. (Schmidt.) Mertens

8. **Naturkunde:** 2 St. Im Sommer: Ausländische Kulturpflanzen; Kryptogamen; das Wichtigste vom Bau und Leben der Pflanze. Im Winter: Systematik des Tierreiches. (Leunis.)
Mertens.

Quarta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Christa.

1. **Religionslehre:** 2 St. a) Katholische: Die Glaubenslehre im Anschlufs an das apostolische Symbolum nach dem Diözesankatechismus. Biblische Geschichte des Neuen Testamentes bis zur Auferstehung Jesu, nach Overberg-Erdmann. Müller.

b. Evangelische, kombiniert mit Quinta und Sexta: Biblische Geschichte des Neuen Testamentes, nach Zahn. Kurze Darstellung des Kirchenjahres. Memorieren ausgewählter Kirchenlieder, Bibelstellen und der drei ersten Hauptstücke des luth. Katechismus.
Dr. Hermens.

2. **Deutsch:** 2 St. Das Wichtigste aus der Wortbildung. Bemerkenswerte Fälle aus der Kasuslehre. Der richtige Gebrauch einiger Präpositionen, nach dem Leitfaden von Buschmann. Lektüre und Deklamation nach dem Lesebuche von Linnig, I. Teil. Memorieren von Volksliedern. Alle drei Wochen ein Aufsatz. Christa.

3. **Latein:** 9 St. Wiederholungen aus der Formenlehre, namentlich feste Einübung der Paradigmata und der unregelmäfsigen Verba. Die Präpositionen. In der Grammatik von Meiring Kap. 82—90. Mündliche Übersetzung aus Ostermann für Quarta. Memorieren von Vokabeln und Musterbeispielen. Lektüre nach Lattmanns Lesebuch, I. und II. Teil. Extemporalien und Skripta. Christa.

4. **Französisch:** 5 St. Wiederholung aus dem Pensum der Quinta. Plötz I, Lektion 60 bis zu Ende. Plötz II, Lektion 1—6. Extemporalien und Skripta. Brockhues.

5. **Geschichte** und **Geographie:** 4 St. Begebenheiten aus dem Altertume in anschaulicher Erzählung. Einübung der Hauptdaten nach der Chronologie. Geographie der aufsereuropäischen Weltteile, nach Daniel. Dr. Unger.

6. **Rechnen** und **Mathematik:** 4 St. a) Abschlufs der gemeinen Arithmetik: Proportionen; Anwendung derselben auf bürgerliche Rechnungsarten; Teilbarkeit der Zahlen; Beziehungen zwischen gemeinen und Dezimalbrüchen; Gebrauch der Klammern. (Schmidt.) b) Grundbegriffe der Geometrie. Gleichheit von Strecken und Winkeln in gradlinigen Figuren. Die einfachsten Konstruktionen. (Boyman.) Mertens.

7. **Naturkunde:** 2 St. Beschreibung und Bestimmung von schwierigeren Pflanzen und Tieren. Einführung in die Systematik. (Leunis.) Mertens.

8. **Zeichnen:** 2 St. Zeichnen schwierigerer Ornamente, Gesichtsteile und Köpfe.
Zeichenlehrer Dreesen.

Quinta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Teusch.

1. **Religionslehre:** 2 St. a. Katholische: Die Lehre von den Geboten, der Sünde und der Tugend, nach dem Diözesankatechismus. Biblische Geschichte des Alten Testamentes von der Teilung des Reiches Israel bis auf Christus, nach Overberg-Erdmann. Müller.

b. Evangelische: Siehe Quarta.

2. **Deutsch:** 2 St. Wiederholung und Erweiterung der Flexionslehre. Die Bestandteile des einfachen Satzes; der zusammengezogene und zusammengesetzte Satz, nach dem Leitfaden von Buschmann. Lektüre und Memorieren nach dem Lesebuche von Linnig I. Auswendiglernen einiger Volkslieder. Übungen in der Orthographie. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit.
Dr. Teusch.

3. **Latein:** 9 St. Wiederholung und Beendigung der Formenlehre, nach Meiring-Fisch. Erweiterung der Vokabelkenntnis. Konstruktion einiger der gebräuchlichsten Konjunktionen. Vorläufige Belehrungen über den acc. c. inf. und die Participialkonstruktionen. Mündliches und schriftliches Übersetzen, nach Ostermann. Extemporalien und Skripta. Dr. Teusch.

4. **Französisch:** 4 St. Plötz I, Lektion 1—60. Mündliche und schriftliche Übungen im Übersetzen. Von Pfingsten ab regelmäfsige Skripta. Brockhues.

5. **Geographie** und **Geschichte:** 3 St. a) Geographie: Wiederholungen aus dem Lehrpensum der Sexta. Geographie Europas mit besonderer Berücksichtigung Deutschlands, nach Daniel. b) Erzählungen aus der deutschen und der brandenburgisch-preufsischen Geschichte.
Dr. Chambalu.

6. **Rechnen:** 4 St. Wiederholung der Bruchrechnung. Einfache und zusammengesetzte Regel-de-Tri. Prozent- und Zinsrechnung (nach Schmidt). Dr. Schumacher.

7. **Naturkunde:** 2 St. Im Sommer: Vergleichende Beschreibung von Pflanzen derselben Gattung und einzelner kleinblütiger Pflanzen. Im Winter: Beschreibung von Vertretern der wichtigsten Ordnungen der Wirbeltiere und der Haupttypen niederer Tiere; vergleichende Beschreibung von Arten derselben Gattung. Mertens.

8. **Zeichnen:** 2 St. Rundlinige Figuren, Ornamente, Rosetten und Arabesken.
Dreesen.

9. **Schreiben:** 2 St. Wiederholung des Pensums der Sexta in weiteren Schreibübungen. Schnellschönschreiben. Einübung der Rundschrift. Dreesen.

10. **Gesang:** 2 St. Fortgesetzte Treffübungen. Die schwierigeren Dur- und Moll-Tonarten und deren Hauptakkorde. Schwierigere rhythmische Übungen Ein- und zweistimmige Lieder in den bezüglichen Tonarten. Volkslieder. Kirchengesang. Gesanglehrer Kipper.

Sexta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Chambalu.

1. **Religionslehre** 3 St. a. Katholische: Die Lehre vom Gebete. Erklärung und Memorieren der notwendigen Gebete. Die Lehre vom Bufssakramente und das Wichtigste über das hl. Altarssakrament, nach dem Diözesankatechismus. Biblische Geschichte des Alten Testamentes bis zur Teilung des Reiches, nach Overberg-Erdmann. Müller.

b. Evangelische: Siehe Quarta.

2. **Deutsch:** 3 St. Kenntnis der Redeteile. Flexion des Substantivs, Adjektivs, Pronomens und Verbums. Bestandteile des einfachen Satzes, nach dem Leitfaden von Buschmann. Orthographische Übungen. Lektüre und Memorieren nach Linnig I. Auswendiglernen einiger Volkslieder. Dr. Chambalu.

3. **Latein:** 9 St. Regelmäfsige Formenlehre bis zum verbum deponens, nach Meiring-Fisch. Mündliches und schriftliches Übersetzen, nach Ostermanns Übungsbuch für Sexta. Memorieren des Vokabulars. Von Pfingsten ab regelmäfsige Skripta. Dr. Chambalu.

4. **Geographie** und **Geschichte:** 3 St. a) Geographische Vorbegriffe. Übersicht der fünf Erdteile. Die wichtigsten Staaten mit ihren Hauptstädten, nach Daniel. b) Erzählungen aus der alten Geschichte. Dr. Chambalu.

5. **Rechnen:** 4 St. Die vier Rechnungsarten mit unbenannten und benannten, ganzen und gebrochenen Zahlen; Dezimalbrüche, nach Schmidt. Übungen im Kopfrechnen. Brockhues.

6. **Naturkunde:** 2 St. Beschreibung einzelner grofsblütigen Pflanzen und der bekanntesten Tiere. Mertens.

7. **Zeichnen:** 2 St. Formenlehre. Verbindung von Linien zu einfachen geometrischen Figuren. Dreesen.

8. **Schreiben:** 2 St. Die Grundregeln beim Schreiben. Einübung der deutschen und lateinischen Schrift. Dreesen.

9. **Gesang:** 2 St. Kenntnis der Noten, der Taktarten und der leichteren Dur- und Moll-Tonarten nebst deren Hauptakkorden. Intervallenlehre verbunden mit Treff- und Gehörübungen Notenschreiben. Einübung von Liedern in den erlernten Tonarten. Volkslieder. Kirchengesang. Kipper.

Besondere Bemerkungen.

1. **Dispensation vom Religionsunterrichte.** Im Schuljahre 1888—1889 waren auf Grund des Ministerial-Erlasses vom 29. Februar 1872 durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums sieben katholische Schüler von der Teilnahme am Religionsunterrichte und Gymnasialgottesdienste entbunden.

2. **Technischer Unterricht.** a) Turnunterricht. Die in der städtischen Turnhalle an Mauritius stattfindenden Turnübungen wurden von dem ordentlichen Lehrer Dr. Schumacher in drei getrennten Abteilungen geleitet, von denen jede zwei wöchentliche Turnstunden hatte. Die erste Abteilung bestand aus den Klassen IIb, IIa, Ib, Ia; die zweite aus IV, IIIb, IIIa; die dritte aus VI, V. Wegen Wohnens in den Vororten Kölns wurden im Winter 21 Schüler vom Turnen dispensiert, auf Grund eines ärztlichen Zeugnisses 39. — Die von der „engeren Lehrerkonferenz“, welcher aufser dem Direktor die ordentlichen Lehrer Brockhues und Dr. Schumacher angehören, für das Sommersemester ins Auge gefafsten Bewegungsspiele und Ausflüge wurden dem entworfenen Plane gemäfs zur Ausführung gebracht. b) Gesangunterricht. Aufser dem obligatorischen Gesangunterrichte in VI und V mit je zwei wöchentlichen Stunden

waren zwei wöchentliche Stunden bestimmt für die von dem Gesanglehrer Kipper geleiteten Übungen des Kirchenchores und des aus allen Klassen ausgewählten engeren Chores c) Fakultativer Zeichenunterricht. 25 Schüler der Klassen Tertia bis Prima einschliefslich nahmen, zu einer Abteilung vereinigt, in zwei wöchentlichen Stunden unter Leitung des Zeichenlehrers Dreesen an diesem Unterrichte teil.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden
von allgemeinerem Interesse.

1. Durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums vom 9. Juni 1888 wird den Direktoren im Auftrage des Herrn Ministers aufgegeben, der sachgemäfsen Aufbewahrung etwaiger früh- und vorgeschichtlicher Altertümer ihre Aufmerksamkeit zuzuwenden. Ein nach höherer Weisung abgefafstes „Merkbuch, Altertümer aufzugraben und aufzubewahren", wird zu genauer Einsichtnahme im Lehrerkollegium empfohlen.

2. Durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums vom 23. Juni 1888 bzw. durch Ministerial-Erlafs vom 19. Juni 1888 wird angeordnet, dafs für weiland Seine Majestät den in Gott ruhenden Kaiser und König Friedrich eine Gedächtnisfeier am 30. Juni 1888 stattfinde. Dabei spricht die vorgesetzte Behörde das Vertrauen aus, dafs durch eine würdige Gestaltung der ernsten Feier das Gedächtnis und die Verehrung für den hochseligen Kaiser Friedrich bei den Schülern in eindringlicher Weise erweckt und befestigt und zugleich bei den übrigen Anwesenden die Anschauung erneuert werde, wie die Schule in der Pflege der Liebe zum Herrscherhause und zum Vaterlande eine Hauptaufgabe ihres Erziehungswerkes erblickt.

3. Durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums vom 24. Mai 1888 werden die Direktoren veranlafst, sich gutachtlich darüber zu äufsern, ob eine ärztliche Beteiligung an der Schulaufsicht — abgesehen von der Art und Ausdehnung der Lehrgegenstände und Schularbeiten — wünschenswert sei, eventuell, wie sich die ärztliche Mitaufsicht zu gestalten habe.

4. Durch Ministerial-Erlafs vom 23. Juli 1888 wird einer Allerhöchsten Bestimmung entsprechend festgesetzt, dafs in sämtlichen Schulen der Monarchie die Geburts- und Todestage der in Gott ruhenden Kaiser Wilhelm I. und Friedrich fortan als vaterländische Gedenk- und Erinnerungstage begangen werden. Die Schule soll nach Anweisung des Herrn Ministers die dem Andenken der verklärten Herrscher geweihten Tage nicht in festlicher Mufse begehen, vielmehr soll sie dieselben ihrer gewohnten Arbeit widmen, diese aber mit einer Stunde einleiten oder beschliefsen, durch welche die Gemüter der zusammengehörenden Schuljugend in Gottesfurcht gesammelt und in der Betrachtung der Thaten und Tugenden Kaiser Wilhelms I und Kaiser Friedrichs erhoben und mit dankbarer und treuer Gesinnung gegen König und Vaterland erfüllt werden.

5. Gemäfs Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums vom 18. Dezember 1888 wird das laufende Wintersemester am Dienstag, den 9. April Nachmittags, geschlossen, das Schuljahr 1889—1890 am Montag, den 29. April in gewohnter Weise begonnen.

III. Chronik der Schule.

1. Das Schuljahr 1888—89 wurde am 16. April v. J. mit einem feierlichen Gottesdienste eröffnet, nachdem am 14. April die Prüfung der neu angemeldeten Schüler stattgefunden hatte.

2. Sonntag den 2. Juni v. J. wurden 39 katholische Schüler des Gymnasiums feierlich zur ersten h. Kommunion geführt, nachdem sie durch den Religions- und Oberlehrer Müller längere Zeit vorbereitet worden waren.

3. Am 30. Juni v. J. beging die Anstalt in der Aula eine öffentliche Trauerfeier für den hochseligen Kaiser und König Friedrich, bei welcher der Direktor die Gedächtnisrede hielt. Am vorhergehenden Sonntage den 24. Juni v. J. hatte die Schule an dem kirchlicherseits angeordneten Trauergottesdienste teilgenommen.

4. Am 21., 22., 23. und 24. November v. J. fand eine Revision des katholischen Religionsunterrichts der Anstalt durch den Vertreter des hochwürdigsten Herrn Erzbischofs Herrn Domkapitular Dr. Dubelman statt. Derselbe wohnte dem betreffenden Unterrichte in allen Klassen bei.

5. Am 15. Dezember 1888 starb der frühere Oberlehrer des Apostelgymnasiums Dr. Friedr. Wilh. Wahlenberg und wurde am 17. d. M. unter Beteiligung der Schule zur letzten Ruhestätte geleitet.

6. Am 26. Januar d. J. fand die Feier des Allerhöchsten Geburtsfestes Seiner Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II. in der Aula statt. Die Festrede hielt Gymnasiallehrer Dr. Schumacher.

7. In dem Lehrerpersonale traten folgende Veränderungen ein:

a. Mit dem Schlusse des Schuljahres 1887—88 trat der erste Oberlehrer der Anstalt, Prof. Dr. Spengler, welcher seit Gründung der Anstalt mit stets sich gleich bleibender Pflichttreue an derselben gewirkt hatte, in den wohlverdienten Ruhestand. Ihm wurde in Anerkennung seiner langjährigen, gewissenhaften Amtsführung der Rote Adlerorden 4. Klasse verliehen.

b. Durch Ministerial-Erlafs vom 28. März v. J. wurde der Oberlehrer Dr. Wrede, welcher seit Herbst 1882 der Anstalt erfolgreiche Dienste geleistet hatte, unter Erhöhung seines Gehaltes an das Kaiser-Wilhelm-Gymnasium hierselbst versetzt. Nach dem Ausscheiden dieser beiden Oberlehrer wurde durch die vorerwähnte Verfügung die erste etatsmäfsige Oberlehrerstelle dem Oberlehrer Prof. Heicks, die zweite dem bisherigen Rektor des Progymnasiums zu Boppard H. Brüggemann verliehen, ferner rückten die Oberlehrer Petit und Dr. Velten um je eine Stelle auf, und in die erledigte letzte etatsmäfsige Oberlehrerstelle wurde der ordentliche Lehrer Müller berufen. In Folge dieser letzten Beförderung wurde durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums vom 6. April v. J. weiter bestimmt, dafs die ordentlichen Lehrer Dr. Unger, Dr. Schumacher, Christa, Mertens und Dr. Teusch je in die nächst höheren Etatsstufen aufrückten. Die hierdurch zur Erledigung kommende letzte ordentliche Lehrerstelle wurde vom 1. April v. J. ab dem bisherigen wissenschaftlichen Hülfslehrer am Gymnasium zu Neuwied Dr. August Chambalu übertragen.

c. Der dem Gymnasium als unbesoldeter Hülfslehrer überwiesene Schulamtskandidat Dr. Maufs wurde sogleich nach seinem Eintritt wieder abberufen, um bei dem Gymnasium zu Saarbrücken Aushülfe zu leisten. An seiner Stelle wurde der Schulamtskandidat Hugo Josten mit beschränkter Stundenzahl beschäftigt, während der Kandidat Lohe zur Fortsetzung seiner lehr-

amtlichen Thätigkeit an das hiesige Kaiser-Wilhelm-Gymnasium überging. Von den übrigen zur Zeit bei der Anstalt als unbesoldete Hülfslehrer beschäftigten Kandidaten Dr. Schwarz und Schwertführer wurde Letzterer zu vorübergehender Aushülfe in Rheydt, Koblenz und Bonn herangezogen.

d. Durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums vom 6. April bzw. 28. August v. J. wurden die Kandidaten des höheren Schulamts Caspar Rochels und Franz Kreutzberg der Anstalt zur Ableistung des Probejahres überwiesen.

8. Die Mitglieder des Lehrerkollegiums erfreuten sich im Allgemeinen während des Schuljahres eines befriedigenden Gesundheitszustandes, so dafs länger dauernde Vertretungen nicht notwendig geworden sind.



IV. Statistische Mitteilungen.

A. Frequenztabelle für das Schuljahr 1888—89.

	O I	U I	O II	U II	O III	U III	IV	V	VI	Sa.
1. Bestand am 1. Februar 1888	17	16	16	28	38	42	46	56	61	320
2. Abgang bis zum Schlufs des Schuljahres 1887—88	17	2	1	7	1	8	6	5	7	54
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern 1888 . . .	13	13	16	33	29	36	43	44	—	227
3b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern 1888	—	2	4	4	5	3	7	5	55	85
4. Frequenz am Anfang des Schuljahres 1888—89	13	16	22	40	40	41	57	56	66	351
5. Zugang im Sommersemester 1888	—	1	—	—	—	2	—	1	—	4
6. Abgang im Sommersemester 1888	—	2	1	6	1	5	—	—	—	15
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis 1888 . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis 1888 . .	—	3	—	—	1	—	—	—	—	4
8. Frequenz zu Anfang des Wintersemesters 1888—89	13	18	21	34	40	38	57	57	66	344
9. Zugang im Wintersemester 1888—89	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10. Abgang im Wintersemester 1888—89	—	—	—	—	1	1	—	7	4	13
11. Frequenz am 1. Februar 1889	13	18	21	34	39	37	57	50	62	331
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1889	19,2	18,2	17,4	16,3	15,5	14,0	12,8	12,3	11,1	—

B. Religions- und Heimathsverhältnisse der Schüler.

	Evang.	Kathol.	Diss.	Juden.	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfang des Sommersemesters 1888	72	251	—	28	331	19	1
2. Am Anfang des Wintersemesters 1888—89 . . .	72	244	—	28	326	17	1
3. Am 1. Februar 1889	68	237	—	26	313	17	1

Das Zeugnis für den einjährigen Dienst haben erhalten Ostern 1888: 23, Michaelis 4; davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen Ostern: 7, Michaelis: 4.

C. Reifeprüfung:

a. Extraneerprüfung des Herbsttermins 1888.

Am 28. Juli 1888 wurden 3 dem Gymnasium zugewiesene Maturitäts-Aspiranten unter dem Vorsitze des Herrn Provinzial-Schulrates Dr. Deiters geprüft. Zweien von ihnen, Wilhelm Silberkuhl und Ludwig Suderow, konnte das Gymnasial-Reifezeugnis erteilt werden.

b. Abiturientenprüfung des Ostertermins 1889.

In der am 22. und 23. März 1889 unter dem Vorsitze des Herrn Provinzial-Schulrates Dr. Deiters abgehaltenen Entlassungsprüfung erhielten folgende Oberprimaner das Zeugnis der Reife:

Name.	Geburtsdatum und Geburtsort.	Konfession.	Name, Stand und Wohnort des Vaters.	Jahre auf dem Gymnasium.	Jahre in Prima.	Gewählter Beruf.
1. Albermann, Max	10. Nov. 1870. Köln.	kath.	Wilh. Albermann. Bildhauer, Köln.	9	2	Rechtswissenschaft.
2. Berndorff, Gustav	13. März 1871. Köln.	kath.	† Jak. Berndorff, Rechtsanwalt. Köln.	9	2	Rechtswissenschaft.
3. Cohen, Max	7. Juni 1870. Köln.	israel.	Herm. Cohen, Kaufmann, Köln.	9	2	Medizin.
4. Cramer, Paul	6. August 1869. Mülheim a. Rh.	kath.	Stephan Cramer, Königl. Notar, Mülheim am Rhein.	9	2	Medizin.
5. Fischer, Wilhelm	13. Okt. 1869. Hildesheim.	kath.	Herm. Fischer, Korrektor bei der Kölnischen Zeitung, Köln.	10	2	Rechtswissenschaft.
6. Grommes, Franz	29. März 1869. Köln.	kath.	† Peter Grommes, Kaufmann, Köln.	10	3	Medizin.
7. Krüll, Wilhelm	24. Dez. 1868. Köln.	kath.	Joseph Krüll, Kaufmann, Köln.	11	3	Rechts- und Staatswissenschaft.
8. Müller, Hermann	9. April 1871. Köln.	kath.	Dr. Max Müller, Geh. Sanitätsrat, Köln.	6	2	Medizin.
9. Otto, Julius	6. April 1868. Niederhermsdorf.	kath.	Johann Otto, Lagerverwalter, Köln.	7	2	Theologie.
10. Pfeifer, Karl	21. Juli 1869. Niederzündorf.	kath.	Friedr. Wilh. Pfeifer, Lehrer, Köln-Melaten.	10	3	Theologie.
11. Runkel, Fritz	5. Febr. 1870. Berg.-Gladbach.	evang.	Julius Runkel, Rektor und Hauptlehrer, Köln.	9	2	Theologie und klassische Philologie.
12. Schotten, Jakob	13. Aug. 1869. Stotzheim.	kath.	Kaspar Schotten, Lehrer, Köln-Braunsfeld.	7	2	Rechtswissenschaft.

Den Abiturienten Berndorff, Cramer, Müller und Runkel wurde die mündliche Prüfung erlassen.

V. Sammlungen von Lehrmitteln.

a. Lehrerbibliothek.

1. Aufser einer Anzahl gröfserer Nachschlagewerke, Wörterbücher und Grammatiken, welche zum Handgebrauche dienen, waren folgende Zeitschriften im Konferenzzimmer aufgelegt: Centralblatt für die Unterrichtsverwaltung in Preufsen; Zeitschrift für das Gymnasialwesen; Fleckeisen und Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik; von Sybel, Historische Zeitschrift; Lyon, Zeitschrift für deutschen Unterricht; Sklarek, Naturwissenschaftliche Rundschau; Zarncke, Litterarisches Centralblatt; Hülskamp, Litterarischer Handweiser.

2. Aufserdem wurden aus etatsmäfsigen Mitteln angeschafft: Jahrbücher des Vereins von Altertumsfreunden im Rheinland, Heft 85, 86 und Festschrift: Das römische Lager in Bonn. Deutsche Schulgesetzsammlung, 1888. Hinrichs, Verzeichnis der 1888 in Deutschland erschienenen Bücher. Iwan Müller, Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft, Halbband XI, XII, XIII. Ellendt, Lexicon Sophocleum ed. Genthe, 1872. Sallust. opera ed. Kritz, 3 Bde., 1834. Weidner, Commentar zu Vergils Aeneis Buch I und II, 1869. Curtius, Peloponnesos, 2 Bde., 1851. Duruy-Hertzberg, Geschichte des römischen Kaiserreichs, Heft 73 bis 88. Mommsen, Handbuch des römischen Staatsrechts, 3. Band, 2. Abteilung, 1888. Giesebrecht, Geschichte der deutschen Kaiserzeit, 5. Band, 1888. Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 82, 83. Süpfle, Geschichte des deutschen Kultureinflusses auf Frankreich, II. Bd. Erste Abteil., 1888. Oscar Peschel, Geschichte der Entdeckungen, 1877. Ritter, Geographisch-statistisches Lexikon, 2 Bde., 1883. Droysen, Friedrich der Grofse, 3 Bde., 1881. von Treitschke, Deutsche Geschichte des 19. Jahrhunderts, 1888. Janssen, Geschichte des deutschen Volkes, VI. Bd., 1888. Scherer, Poetik, 1888. Hettner, Geschichte der französischen Litteratur im achtzehnten Jahrhundert, 1881. Friedr. Ludw. Jahns Werke. Neu herausgeg. von Dr. Euler, 3 Bde., 1884—87. Thomé, Flora von Deutschland, Österreich und der Schweiz, III. Bd., 1888. Wundt, Grundzüge der physiologischen Psychologie, 1887, 2 Bde. Dazu kommen die Fortsetzungen des deutschen Wörterbuches von Grimm.

3. Geschenkt wurden: Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen, 26. Bd. (Dritte rheinische Versammlung) 1888, von dem Königlichen Provinzial-Schulkollegium. Bericht über die Verwaltung der Stadt Köln 1889, von Herrn Oberbürgermeister Becker. Geyer und Mewes, Poetisches Lesebuch aus Phädrus und Ovid, von Enslin in Berlin. Abicht, Alte Geschichte für Quarta, von Winter in Heidelberg. Conrads, Altdeutsches Lesebuch in neudeutschen Übersetzungen, von Bädeker in Leipzig. Süpfle, Französisches Lesebuch, von Groos in Heidelberg. Hermann, Lehrbuch der Weltgeschichte, 2 Teile. Lutsch, Lateinisches Lehr- und Lesebuch und Vokabularium für Quinta, von Velhagen und Klasing in Bielefeld. Sammler, Studierlampe, von Anz in Werdau.

b. Schülerbibliothek.

Angeschafft wurden: Oscar Jaeger, Weltgeschichte, Bd. II, 1887 und Bd. III, 1888. Fleuriot, Jugendschriften, Bd. 1—4, 1887. Derboeck, Königin Luise von Preufsen, o. J. Wilh. Müller, Kaiser Friedrich, 1888. Ohrem, Kaiser Friedrich der Gute, 1888. Ludwig Hahn, Wilhelm, der erste Kaiser des neuen deutschen Reiches, 1888. Stein, Unser Kronprinz

in Spanien und im Morgenlande. Rogge, Kaiser Wilhelm der Siegreiche. 1889. Feodor von Köppen, Moltke. 1889. Blasendorff, von Blücher, 1888. Scherer, Deutschland im Liede, 1876. Bellermann, Schillers Dramen. 1888. Jonas, Christ. Gottfr. Körner, 1888. Walter Scott, Quentin Durward. 1881. Gaebler, Heroen der Afrikaforschung. 1886. Von Freeden, Reisebilder aus Afrika. 1888. Reuleaux, Der Weltverkehr und seine Mittel. 1. Bd. 1889. Oppel, Tambour und General. 1884. Weber, Kynstudt. 1888. Wägner, Prinz Eugen, der edle Ritter, 1886. Höcker, Die Kreuzfahrer nach W. Scott. 1889. Höcker. Dietrich von Bern. 1889. Höcker. Wuotans Ende. 1889. Behrendt, Pytheas von Massilia. 1889.

Geschenkt wurde: Herzog Reichard. von Herrn von Vacano.

c. Physikalische und naturhistorische Sammlung.

Angeschafft wurden: Ein Lebensrad mit Darstellungen schwingender Punkte. — Ein verstellbares Pendel nach Mach. — Ein Kaleidoskop. — Ein Flufsspath. — Präparate in Weingeist: Tintenfisch — Seefeder — Bohrmuschel — Felsenskorpion. — Skelett-Präparate: Fufs des Hundes, Pferdes, Schweines, Rindes und der Katze. — Hamster mit Backentaschen — Schildkröte — Frosch — Spechtkopf mit Zunge — Papageienkopf — Haifisch-Rückgrat — Walfischbarte. — Präparate in Glaskasten: Vogelspinne — Skolopender und Assel — Zerlegungen von Hirschkäfer und Maulwurfsgrillen — Entwickelungen des Ameisenlöwen, der Wanderheuschrecke, der Eintagsfliege, der gemeinen Wespe, des Hirschkäfers, der Maulwurfsgrille — Baumwollenkapsel. — Abbildungen: Leuckart und Nitzsche. Zoolog. Wandtafeln. 13 Blatt. — Lehmann und Leutemann. Zoolog. Atlas. 6 Blatt. — Haustiere. 4 Blatt. — Lehmann-Brafs. Zootom. Wandtafeln. 3 Blatt. — Lehmann, Geographische Charakterbilder. 13 Blatt. — Ein ausgestopfter Affe (Geschenk).

VI. Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

Befreiungen von der Zahlung des Schulgeldes, welche nach den betreffenden Bestimmungen bis zu 10 % der Solleinnahme zulässig sind, wurden bedürftigen und würdigen Schülern in der Weise bewilligt, dafs 22 Schüler ganze und 10 Schüler halbe Freistellen erhielten.

Im Genusse von Familienstiftungen befanden sich 21 Schüler; Unterstützungen aus sonstigen Stiftungen empfingen 13 Schüler.

VII. Mitteilungen an die Schüler und deren Eltern.

a. Schlussgottesdienst mit Te Deum: Sonntag, den 7. April.

Das Schuljahr wird Dienstag, den 9. April mit der Censur der einzelnen Klassen und der Entlassung der Abiturienten geschlossen.

b. Anfang des neuen Schuljahres und die Aufnahmeprüfung.

1. Das neue Schuljahr beginnt Montag den 29 April, morgens 8 Uhr, mit feierlichem Gottesdienste. Die zu prüfenden Schüler haben sich bereits am Samstag den 27. April, vormittags 8 Uhr, mit den erforderlichen Schulzeugnissen versehen im Gymnasium einzufinden. Nach erfolgter Aufnahme ist zugleich die Geburtsbescheinigung und der Impfschein vorzulegen.

2. Anmeldungen, soweit sie noch berücksichtigt werden können, müssen spätestens bis zum 26. April bei dem Unterzeichneten erfolgen. Für die Aufnahme in Sexta gelten folgende Bestimmungen:

a. Die Aufnahme in die unterste Gymnasialklasse darf nicht vor dem vollendeten neunten Lebensjahre erfolgen.

b. Gefordert wird als Bedingung der Aufnahme mindestens: Geläufigkeit im Lesen deutscher und lateinischer Druckschrift; leserliche und reinliche Handschrift; Fertigkeit, Diktiertes ohne grobe Fehler nachzuschreiben; Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen; Bekanntschaft mit den Geschichten des Alten und Neuen Testamentes, und bei den evangelischen Schülern mit den wichtigsten Bibelsprüchen und einigen Liedern.

3. Auswärtige Schüler müssen so untergebracht werden, dafs sie unter der nötigen Aufsicht stehen. Wirtshäuser können im allgemeinen nicht als geeignet angesehen werden. Auch ist aus mehrfachen Gründen zu wünschen, dafs die Schüler nicht allzu weit vom Gymnasium entfernt wohnen.

4. Es wird der dringende Wunsch ausgesprochen, dafs beabsichtigte Abmeldungen sobald als möglich, jedenfalls aber noch vor dem 26. April d. J. durch die Eltern oder deren Stellvertreter erfolgen. Auch im Laufe des Schuljahres sind Abmeldungen sofort zu bewirken, wenn der Austritt des Schülers feststeht.

Köln, im März 1889.

Dr. Waldeyer,
Gymnasial-Direktor.





